



This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

### Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

- + *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
- + *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
- + *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
- + *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

### About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at <http://books.google.com/>



## Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

## Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

- + *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
- + *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
- + *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
- + *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

## Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter <http://books.google.com> durchsuchen.

E

Nr. 2

• 5

• 14

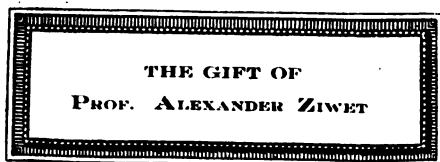
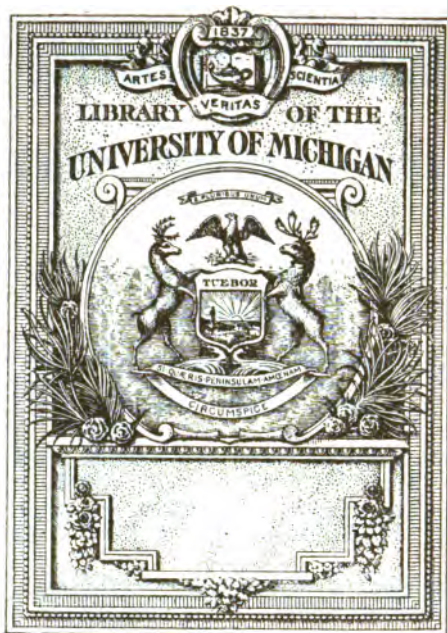
• 17

• 18

• 41

• 4

- 54. J. H. Lambert, Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten. (1772.) Herausgeg. von A. Wangerin. Mit 21 Textfiguren. (96 S.) *M* 1.60.
- 55. Lagrange u. Gauss, Abhandlungen über Kartenprojection. (1779 und 1822.) Herausgeg. von A. Wangerin. Mit 2 Textfiguren. (102 S.) *M* 1.60.
- 60. Jacob Steiner, Die geometr. Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linie und eines festen Kreises, als Lehrgegenstand auf höheren Unterrichts-Anstalten und zur praktischen Benutzung. (1833.) Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 25 Textfiguren. (86 S.) *M* 1.20.
- 64. C. G. J. Jacobi, Über die vierfach periodischen Functionen zweier Variabeln, auf lateinischen u



EN.

erkehrten  
ziehungs-  
ngerin.

A. Wan-

Function-  
(81 S.)

Übers.  
Blasius.

Laplace  
Dirichlet

Abhand-  
(97) und  
tel. Mit

(1762,  
eben von

362

2 B  
357  
. L 22  
1902

- Nr. 65. **Georg Rosenhain**, Abhandlung über die Functionen zweier Variabler mit vier Perioden, welche die Inversen sind der ultrae elliptischen Integrale erster Klasse. (1851.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Französischen übersetzt von A. Witting (94 S.) *M* 1.50.
- 67. **A. Göpel**, Entwurf einer Theorie der Abel'schen Transcendenten erster Ordnung. (1847.) Herausgegeben von H. Weber. Aus dem Lateinischen übersetzt von A. Witting. (60 S.) *M* 1.—.
- 71. **N. H. Abel**, Untersuchungen über die Reihe:  

$$1 + \frac{m}{1}x + \frac{(m \cdot m - 1)}{1 \cdot 2} \cdot x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot x^3 + \dots$$
(1826.) Herausgegeben von A. Wangerin. (46 S.) *M* 1.—.
- 73. **Leonhard Euler**, Zwei Abhandlungen über sphärische Trigonometrie. Grundzüge der sphärischen Trigonometrie und allgemeine sphärische Trigonometrie. (1753 u. 1779.) Aus dem Französischen und Lateinischen übersetzt und herausgegeben von E. Hammer. Mit 6 Figuren im Text. (65 S.) *M* 1.—.
- 77. **C. G. J. Jacobi**, Über die Bildung und die Eigenschaften der Determinanten. (De formatione et proprietatibus Determinantium.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (73 S.) *M* 1.20.
- 78. **J. C. G. Jacobi**, Über die Functionaldeterminanten. (De determinantibus functionalibus.) (1841.) Herausgegeben von P. Stäckel. (72 S.) *M* 1.20.
- 82. **Jacob Steiner**, Systematische Entwicklung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten von einander, mit Berücksichtigung der Arbeiten alter und neuer Geometer über Porismen, Projections-Methoden, Geometrie der Lage, Transversalen, Dualität und Reciprocität etc. (1832.) I. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 14 Fig. im Text. (126 S.) *M* 2.—.
- 83. ——— II. Theil. Herausgegeben von A. J. v. Oettingen. Mit 2 Tafeln und 2 Figuren im Text. (162 S.) *M* 2.40.
- 90. **A. Bravais**, Abhandlung über die Systeme von regelmässig auf einer Ebene oder im Raum vertheilten Punkten. (1848.) Übers. u. herausgegeben von C. u. E. Blasius. Mit 2 Tafeln. (142 S.) *M* 2.—.
- 91. **G. Lejeune Dirichlet**, Untersuchungen über verschiedene Anwendungen der Infinitesimalanalysis auf die Zahlentheorie. (1839 bis 1840.) Deutsch herausgegeben von R. Haussner. (128 S.) *M* 2.—.
- 93. **Leonhard Euler**, Drei Abhandlungen über Kartenprojection. (1777.) Mit 9 Textfig. Herausg. von A. Wangerin. (78 S.) *M* 1.20.
- 103. **Joseph Louis Lagrange's** Zusätze zu Euler's Elementen der Algebra. Unbestimmte Analysis. Aus dem Französischen übersetzt von A. J. von Oettingen, herausg. von H. Weber. (171 S.) *M* 2.60.
- 107. **Jakob Bernoulli**, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Ars conjectandi). (1713.) I. u. II. Theil. Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 1 Figur im Text. (162 S.) *M* 2.50.
- 108. ——— III. u. IV. Theil mit dem Anhang: Brief an einen Freund über das Ballspiel (Jeu de Paume). Übersetzt und herausgegeben von R. Haussner. Mit 3 Fig. (172 S.) *M* 2.70.
- 111. **N. H. Abel**, Abhandlung über eine besondere Klasse algebraisch auflösbarer Gleichungen. Herausgegeben von Alfred Loewy. (50 S.) *M* —.90.

- Nr. 112. **Augustin-Louis Cauchy**, Abhandlung über bestimmte Integrale zwischen imaginären Grenzen (1826). Herausgegeben von P. Stäckel. (80 S.) *M* 1.25.
- » 113. **Lagrange** (1772) und **Cauchy** (1819), Zwei Abhandlungen zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung. Aus dem Französischen übersetzt und herausgegeben von Dr. Gerhard Kowalewski. (54 S.) *M* 1.—.
- » 116. **Lejeune Dirichlet**, Die Darstellung ganz willkürlicher Functionen durch Sinus- und Cosinusreihen (1837) und **Philipp Ludwig Seidel**, Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen (1847). Herausgegeben von Heinrich Siebmann. (58 S.) *M* 1.—.
- » 117. **Gaspard Monge**, Darstellende Geometrie (1798). Übersetzt und herausgegeben von Robert Haussner. Mit zahlreichen Figuren in dem Texte und in den Anmerkungen. (217 S.) *M* 4.—.
- » 122. **Carl Friedrich Gauss**, Sechs Beweise des Fundamentaltheorems. über quadratische Reste. Herausgegeben von Eugen Netto. (111 S.) *M* 1.80.
- » 123. **Jacob Steiner**, Einige geometrische Betrachtungen (1826). Herausgegeben von Rudolf Sturm. Mit 46 Figuren im Texte und in den Anmerkungen. (125 S.) *M* 2.—.
- » 127. **Jean Baptiste Joseph Baron Fourier**, Die Auflösung der bestimmten Gleichungen. (Analyse des équations déterminées.) (IV u. 262 S.) *M* 4.—.
- » 129. **Johann Friedrich Pfaff**, Allgemeine Methode, partielle Differentialgleichungen zu integrieren (1815). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Gerhard Kowalewski. (84 S.) *M* 1.40.
- » 130. **N. J. Lobatschefskij**, Pangeometrie (Kasan 1856). Übersetzt und herausgegeben von Heinrich Liebmann. Mit 30 Figuren im Text. (96 S.) *M* 1.70.
- » 133. **J. H. Lambert's** Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen. *Insigniores orbitae Cometarum proprietates* (1761). *Observations sur l'Orbite apparente des Comètes* (1771). Auszüge aus den »Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik« (1772). Deutsch herausgegeben und mit Anmerkungen versehen von J. Bauschinger. Mit 35 Figuren im Text. (149 S.) *M* 2.40.
-

1880

2.9  
J. H. Lambert's *Alexander Giese*  
Johann Heinrich

# Abhandlungen zur Bahnbestimmung der Cometen

---

Insigniores orbitae Cometarum proprietates (1761)

Observations sur l'Orbite apparente des Comètes (1771)

Auszüge aus den

»Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik« (1772)

---

Deutsch herausgegeben und mit Anmerkungen versehen

von

**J. Bauschinger**

Mit 35 Figuren im Text

---

Leipzig

Verlag von Wilhelm Engelmann

1902



2  
3  
4

5  
6  
7



## I.

# Ueber die Eigenschaften der Cometenbewegung.

(Insigniores orbitae Cometarum proprietates, 1761.)

## Vorrede.

[III] Es giebt viele Capitel der angewandten Mathematik, die trotz mehrfacher Behandlung noch weit von dem nothwendigen Grade der Ausbildung entfernt sind. Zwei Gründe sind es wohl hauptsächlich, die eine Verzögerung hierin verursachen. Wenn nämlich, wie in der Regel der Fall ist, die Theorie der Anwendung halber ausgebaut wird, so geht man häufig, erstere nur oberflächlich behandelnd, rasch zur Anwendung über und betritt den sich zuerst darbietenden Weg ohne Rücksicht, ob er [IV] kurz oder ein Umweg ist. Und andererseits zeigt auch die Theorie, wenn man sie sorgfältig entwickeln will, nicht selten das Problem von einer so verwickelten und schwierigen Seite, schon beim ersten Angriff, dass auch ein geduldiger Arbeiter, der unverdrossen nach Problemen sucht, abgeschreckt wird. Aber welche Hoffnung könnte einen Forscher mehr anreizen, ein Problem nochmals anzugreifen, als die, es schliesslich doch zu überwinden oder wenigstens Anderen den Weg zu bahnen, die um jeden Preis zum wahren Ziele gelangen wollen.

Wo ich immer diese Ursachen vorfand, habe ich gesehen, dass jedes schwierige Problem eine ihm eigenthümliche Methode und eine besondere Verbindung von heuristischen Kunstgriffen verlangt; solange diese nicht beisammen sind, bekommt man keine elegante Lösung oder wenigstens nur auf weiten Umwegen. Häufig wird auch der wahre Kern der Frage noch [V] verkannt, oder man sieht nicht, was man suchen soll, und geht so an dem wahren Angelpunkt vorüber. Nach meiner Erfahrung empfiehlt es sich, wenn man eine solche schwierige Materie zu behandeln hat, unter allen Umständen, einen einfachen speciellen Fall herauszugreifen; denn nicht selten findet

Recd. 9-18-37 gfm  
OS-15-2344



sich, dass die schönsten Eigenschaften desselben sich mit geringen Aenderungen verallgemeinern lassen; so stellt sich oft eine schwierige Sache, wenn gehörig durchgeführt, als leicht heraus. Auch deshalb kann eine Sache oft nicht in Fluss gebracht werden, weil sie durch zu viele Nebenumstände verhüllt ist, und erst wenn sie ganz durchschaut ist, erkennt man diese als fremd oder willkürlich.

Beispiele für diese Behauptungen will ich aus anderen Wissenschaften nicht vorbringen, da man ihrer in dem vor-[VI] liegenden Werke genug findet. Ich habe darin die *wichtigsten Eigenschaften der Cometenbewegung* auf dieselbe Weise entwickelt wie vor drei Jahren die der Lichtstrahlen auf ihrem Wege durch mehrere durchsichtige, sphärische und concentrische Medien (»Les propriétés remarquables de la route de la lumière par les airs etc.« A la Haye 1758).

Methoden, eine Cometenbahn aus drei geocentrischen Beobachtungen durch Versuche, Construction oder Messung zu ermitteln, kennt man schon viele; wer meine Vorgänger kennt, wird daher glauben, es werde hier eine alte Sache nochmals abgewandelt. Ich gebe auch zu, dass ich sehr berühmte Vorgänger habe, aber doch eben nur Pfadfinder, die von den Quellen an sprungweise dahin gelangt sind, wohin eine gute Theorie auf einem schönen Wege hätte führen müssen. Die ersten Principien und Gesetze des Himmels ausgenommen, blieben sie von dem eigentlichen Problem, das hier unser Hauptziel ist, nämlich die Bahn aus drei Beobachtungen zu entwickeln, [VII] sehr weit entfernt. Musste es nicht auffallen, dass die schönen Eigenschaften der Kegelschnitte, die durch den Wett-eifer der grössten Geometer aller Zeiten erforscht wurden, ganz unnütz sein sollten, sobald es sich um Cometenbahnen handelte? Das war doch unter allen Umständen des Versuches werth und keine eitle Hoffnung, und der Erfolg hat denn auch gezeigt, dass jene schönen Eigenschaften nur noch schöner hervortreten, wenn man sie auf die Cometenbahnen in der Weise anwendet, dass man an Stelle der Flächen die Zeit setzt. Ich habe diejenigen Sätze, welche die Kegelschnitte unabhängig von den Cometenbahnen betreffen, um ihre allgemeinere Bedeutung hervorzuheben, mit »*Lemma*« bezeichnet und sie so von den übrigen, die sich auf die Cometenbahnen beziehen, unterschieden. Die schon bekannten Sätze habe ich unter die neuen eingereiht, damit der Zusammenhang klarer hervortrete. Von dem Neuen habe ich jedoch nur das vorgebracht, was

mir schön erschien, und dann solches, was Weiterforschenden den Weg weisen konnte, wie ich immer gleich angedeutet [VIII] habe. Ich meine hier z. B. die Ueberlegungen über die orthographische Projection auf die Ebene der Ekliptik oder eine andere zweckmässig gewählte Ebene; dann gewisse Sätze im ersten der eigentlichen Abhandlung vorausgehenden Theile, und solche im vierten Theile, wo ich kurz den Unterschied zwischen parabolischen, elliptischen und hyperbolischen Bahnen berühre. Mein Hauptziel war die parabolische Bahn; hier sind die Sätze und Aufgaben so einleuchtend, dass ich auch der Beispiele nicht bedurfte, die man sonst hinzufügt. Die elliptischen Bahnen habe ich im vierten Theile nur so weit ausgeführt, dass man den Zusammenhang der schönsten Eigenschaften der parabolischen Bahn mit den entsprechenden der anderen Kegelschnitte klar durchschauen konnte. Wer auf diesem Gebiete sich gründlicher belehren will, muss zu dem ausgezeichneten Werke von Euler »*Theoria motuum Planetarum et Cometarum*« greifen.

## Erster Theil.

### Allgemeinere vorbereitende Sätze über die Parabel.

[1] § 1. Lemma 1. (Fig. 1.) Wird in der Parabel  $AN$ , deren Axe  $AF$  und deren Brennpunkt  $F$  ist, ein beliebiger Radius-

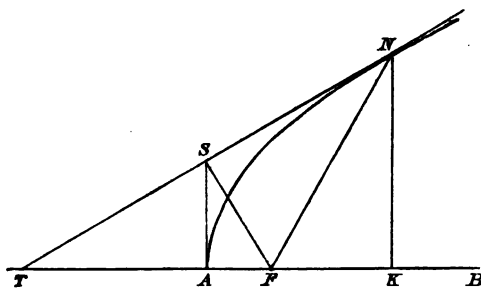


Fig. 1.

vector  $FN$  gezogen und in seinem Endpunkt die Tangente  $NT$ , so ist Winkel  $TNF = \frac{1}{2} NFB$ .

Beweis: Da nach der Natur der Parabel  $FT = FN$  ist, so wird Winkel  $FTN = TNF$ ; nun ist  $FTN + TNF = NFB$ , also  $TNF = \frac{1}{2} NFB$ .

§ 2. **Lemma 2.** (Fig. 1.) Wird im Scheitel  $A$  der Parabel das Lot  $AS$  zur Axe errichtet, welches die Tangente  $TN$  in  $S$  schneidet, und wird  $S$  mit dem Brennpunkte  $F$  verbunden, so wird der Winkel  $AFN$  durch  $FS$  halbiert und die Dreiecke  $AFS$  und  $FSN$  werden ähnlich.

[2] Beweis: Da nämlich  $TS = SN$  und  $FT = FN$ , so wird Winkel  $TFS = SFN$ . Ferner steht  $FS$  auf der Tangente  $TN$  senkrecht und das Dreieck  $FSN$  ist somit rechtwinklig. Da aber Winkel  $SAF$  ein Rechter ist, so ist auch das Dreieck  $FAS$  rechtwinklig. Wegen der Gleichheit der Winkel  $AFS$  und  $SFN$  haben also beide Dreiecke gleiche Winkel, sind somit ähnlich.

§ 3. **Zusatz 1.** Es ist also:  $AF:FS = FS:FN$  oder  $FS$  ist die mittlere Proportionale zwischen  $FA$  und  $FN$ .

§ 4. **Zusatz 2.** Da Winkel  $ASF = SNF$ , so wird  $AF = SF \cdot \sin ASF = SF \cdot \sin SNF = FN \cdot \sin FNT$ <sup>2</sup>. Ist daher der Radiusvector  $FN$  gegeben und der Winkel  $FNT$ , so wird daraus sehr leicht der Abstand des Brennpunktes vom Scheitel  $AF$  und die Lage der Axe gefunden.

§ 5. **Zusatz 3.** Da der Winkel  $FSN$  constant ein Rechter ist, so können, wenn der Brennpunkt  $F$  und die Gerade  $AS$  ihrer Lage nach gegeben sind, durch Ziehen von Normalen zu den Verbindungslinien von  $F$  mit beliebigen Punkten  $S$  beliebig viele die Parabel einhüllende Tangenten construiert werden.

§ 6. **Anmerkung.** Die folgenden Sätze sind längst bekannt und können mit wenig Aenderungen auf die anderen [3] Kegelschnitte angewendet werden; in Bezug auf die Parabel mögen sie wie folgt dargelegt werden.

§ 7. **Lemma 3.** (Fig. 2.) Wenn an zwei Punkte  $N$  und  $M$  der Parabel die Tangenten  $NR$  und  $RM$  gelegt und vom Brennpunkte  $F$  die Geraden  $FN$ ,  $FM$ ,  $FR$  gezogen werden, so sind die Dreiecke  $FNR$  und  $FRM$  ähnlich und, wenn die Tangente  $MR$  bis  $T$  verlängert wird, ist der Winkel  $TRN = NFR = RFM$ .

Beweis: Man errichte im Scheitel  $A$  die Normale  $AT$  zur Axe  $AF$ , verlängere die Tangenten  $RM$  und  $NR$  bis zu ihren Schnitten  $T$  und  $S$  mit dieser Normalen und ziehe  $FT$

und  $FS$ . Da dann die Winkel  $FSR$  und  $FTR$  Rechte sind (§ 5) und dieselben der Geraden  $FR$  gegenüber liegen, so liegen die vier Punkte  $F, S, T, R$  auf einem Kreise, dessen Durchmesser  $FR$  ist.

Also ist Winkel  $FST + FRT = 180^\circ$  und daher  $ASF = FRT = FNS$  (§ 2). Da somit die Dreiecke  $FNS$  und  $FTR$  ähnlich sind, so wird auch Winkel  $SFN = TFR$  und Winkel  $SFT = NFR = SRT$ . Nun ist aber (§ 1)  $SNF = \frac{1}{2} NFB$  und  $TMF = \frac{1}{2} MFB$ , also  $SNF - TMF = \frac{1}{2} NFM$ ; ferner im Viereck  $FNRM$ :

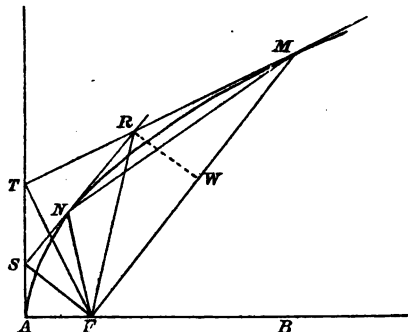


Fig. 2.

Winkel  $SNF - TMF = NFM - TRS$  und daher  $NFM - TRS = \frac{1}{2} NFM$  oder  $SRT = \frac{1}{2} NFM = NFR$ . Die Gerade  $FR$  halbt also den Winkel  $NFM$ . Da Winkel  $SNF = TRF$ , so wird auch  $FNR = FRM$ . Somit sind in den Dreiecken  $FNR$  und  $FRM$  entsprechende Winkel gleich, sie selbst also einander ähnlich.

[4] § 8. **Zusatz 1.** Es wird also  $FN:FR = FR:FM$ , und daher ist  $FR$  die mittlere Proportionale zwischen  $FN$  und  $FM$  (vergl. § 3). Es ist auch

$$FN:FR = FR:FM = \sqrt{FN}:\sqrt{FM}.$$

§ 9. **Zusatz 2.** Wenn also der Brennpunkt  $F$  und zwei Punkte  $N$  und  $M$  der Parabel gegeben sind, so erhält man, wenn man den Winkel  $NFM$  durch die Gerade  $FR$  halbt und  $FR = \sqrt{FN \cdot FM}$  macht, sofort die Möglichkeit, die Tangenten  $RN$  und  $RM$  zu construiren; fällt man auf sie die Lote  $FS$  und  $FT$ , so erhält man die Gerade  $TS$ , welche durch den Scheitel geht, und somit diesen selbst und  $AF$ .

§ 10. **Zusatz 3.** Ebenso: wenn das Dreieck  $FNM$  gegeben ist, so ist auch Dreieck  $FRM$  bekannt und daher der Winkel  $RMF$ ; also hat man nach § 4  $AF = FM \cdot \sin RMF^2$ .

§ 11. **Zusatz 4.** Da  $FRM = FNR$ , so wird, wenn wir die Gerade  $FN$  und die Tangente  $NR$  festhalten, der

Winkel  $FRM$  ein constanter sein, welches auch die Lage von  $FM$  gegen  $FN$  sei. Hiermit ist die oben (§ 5) angegebene Construction der Parabel allgemeiner dargethan.

§ 12. **Zusatz 5.** Wird die Sehne  $NM$  gezogen, so wird die Summe der Winkel

$$RNM + RMN = TRS = NFR.$$

§ 13. **Zusatz 6.** Da ferner ist:

$$NR:RM = \sin RMN:\sin RNM$$

[5] und, weil Winkel  $NFM$  durch  $FR$  halbirt wird:

$$NR:RM = \sin RMF:\sin RNF,$$

so folgt

$$\sin RMN:\sin RNM = \sin RMF:\sin RNF.$$

§ 14. **Zusatz 7.** Wegen der Aehnlichkeit der Dreiecke  $FNR$  und  $FRM$  ist:

$$NR:RM = FN:FR;$$

da nun (§ 8)

$$FN:FR = \sqrt{FN}:\sqrt{FM},$$

so folgt (§ 13)

$$\sqrt{FN}:\sqrt{FM} = \sin RMF:\sin RNF.$$

§ 15. **Lemma 4.** (Fig. 3.) Werden in drei Punkten  $L, M, N$  der Parabel die Tangenten  $LR, PMQ, RN$  gezogen, so liegen die Schnittpunkte  $P, R, Q$  derselben und der Brennpunkt  $F$  auf einem Kreise.

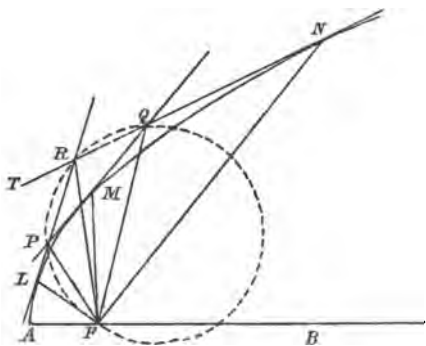


Fig. 3.

**Beweis:** Es ist nämlich (§ 7) Winkel

$$TRL = \frac{1}{2}LFN \\ = \frac{1}{2}LFM + \frac{1}{2}MFN,$$

aber (§ 7)

$$\frac{1}{2}LFM = PFM \text{ und} \\ \frac{1}{2}MFN = MFQ, \text{ also:} \\ TRL = PFM + MFQ \\ = PFQ.$$

Im Viereck  $PRQF$  sind somit die Summen zweier gegenüberliegender Winkel  $PFQ + PRQ = 180^\circ$ , eine Eigenschaft,

die nur dem in einen Kreis eingeschriebenen Viereck zukommt.

[6] § 16. **Zusatz 1.** Sind daher drei Tangenten einer Parabel ihrer Lage nach gegeben, so kann durch ihre Schnittpunkte  $P, Q, R$  ein Kreis gelegt werden, der durch den Brennpunkt der Parabel hindurchgeht.

§ 17. **Zusatz 2.** Sind fernerhin vier Tangenten einer Parabel ihrer Lage nach gegeben, so können zwei solche Kreise beschrieben werden, in deren einem Schnittpunkte der Brennpunkt der Parabel liegt.

§ 18. **Lemma 5.** (Fig. 3.) *Hält man die beiden Tangenten  $LR$  und  $RN$  fest und ändert die Lage der dritten  $PMQ$  beliebig, so bleibt das Verhältniss zwischen den Abschnitten  $LP$  und  $RQ$  constant.*

Beweis: Es ist nämlich

$$\text{Winkel } LFP = \frac{1}{2} LFM \quad \text{und}$$

$$LFR = \frac{1}{2} LFN,$$

also:

$$PFR = \frac{1}{2} MFN = MFQ;$$

addirt man also zu beiden den Winkel  $RFM$ , so wird

$$PFM = RFQ = LFP.$$

Es ist aber auch  $PLF = QRF$ , also sind die Dreiecke  $LPF$  und  $RQF$  ähnlich und daher das Verhältniss zwischen  $LP$  und  $RQ$  constant.

[7] § 19. **Zusatz 1.** Es wird sonach:

$$LP : RQ = LR : RN = LF : RF$$

oder:

$$LP : RQ = \sqrt{LF} : \sqrt{NF}. \quad (§ 8)$$

§ 20. **Zusatz 2.** Daraus folgt auch:

$$RP : QN = \sqrt{LF} : \sqrt{NF}.$$

§ 21. **Zusatz 3.** Ferner:

$$LR = PR + \frac{RQ \cdot LR}{RN} \quad (§ 19)$$

oder:

$$\frac{PR}{LR} + \frac{RQ}{RN} = 1.$$

§ 22. **Zusatz 4.** Da man hat:

$$PFM = LFP$$

und

$$MFQ = PFR,$$

so folgt durch Addition:

$$PFQ = LFR = \frac{1}{2} LFN.$$

Es ist aber auch:

$$FPM = FLP = FRQ.$$

Also sind die Dreiecke  $LRF$ ,  $RNF$ ,  $PFQ$  ähnlich.

§ 23. **Zusatz 5.** Welches also auch die Lage der Tangente  $PMQ$  sei, immer wird, wenn die Tangenten  $LR$  und  $RN$  festgehalten werden, das Verhältniss zwischen den Seiten  $FP$ ,  $PQ$  und  $FQ$  constant sein.

[8] § 24. **Lemma 6.** (Fig. 4.) Von drei ihrer Lage nach gegebenen Tangenten  $RQM$ ,  $RPr$  und  $qrm$  einer Parabel werden auf einer beliebigen vierten  $qPQ$  Stücke  $qP$  und  $PQ$  abgeschnitten, deren Verhältniss constant ist.

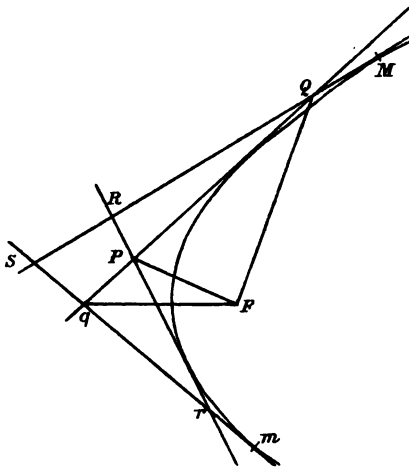


Fig. 4.

**Beweis:** Nach § 23 ist nämlich sowohl das Verhältniss zwischen  $PF$  und  $PQ$  als auch jenes zwischen  $PF$  und  $Pq$  constant, also muss auch das zwischen  $Pq$  und  $PQ$  constant sein.

§ 25. **Lemma 7.**  
**Aufgabe 1.** (Fig. 4.) Wenn drei Gerade  $Rr$ ,  $RQ$ ,  $rQ$  ihrer Lage nach gegeben sind, eine vierte  $qQ$  so zu legen, dass die Abschnitte  $qP$  und  $PQ$  in einem gegebenen Verhältniss stehen.

**Erste Lösung.** Die Aufgabe ist unbestimmt. Wenn eine einzige Gerade  $qQ$  gezogen ist, die der Bedingung genügt, so liegen vier Tangenten einer Parabel vor, mit deren Hülfe der

Brennpunkt  $F$  nach § 17 gefunden wird, und hernach können die Parabel selbst nach § 9 oder beliebig viele Tangenten derselben nach § 5 construiert werden. Alle diese letzteren aber genügen nach Satz 6 der Bedingung der Aufgabe.

Zweite Lösung. Da nach § 24

$$qP : PQ = SR : RM = rm : Sr,$$

so folgt

$$SR : SM = rm : mS$$

[9] oder

$$SM : Sm = SR : rm.$$

Es ist aber auch (§ 19)

$$SM : Sm = QM : Sq,$$

also:

$$SR : rm = QM : Sq.$$

Wenn daher das Verhältniss zwischen  $qP$  und  $PQ$  gegeben ist, so ergibt die erste Proportion  $RM$  und  $rm$  und daher die Lage der Berührungspunkte  $M$  und  $m$ . Wird weiter der Abschnitt  $QM$  beliebig angenommen, so steht dieser zu  $Sq$  in dem constanten Verhältniss  $SR : rm$ . Zu jedem beliebigen Punkte  $Q$  wird also der entsprechende  $q$  gefunden werden können, so dass die Gerade  $Qq$  gezogen werden kann.

Dritte Lösung. Da

$$Pq : \sin qPr = qr : \sin qPr$$

$$PQ : \sin QRP = QR : \sin QPR$$

und

$$\text{Winkel } qPr = QPR,$$

so wird

$$Pq : PQ = \frac{qr \cdot \sin qPr}{\sin qPr} : \frac{QR \cdot \sin QRP}{\sin qPr},$$

also:

$$\frac{PQ}{Pq} \sin qPr : \sin QRP = QR : qr = \frac{PQ}{Pq} : \frac{Sr}{SR}.$$

Wird also  $QR$  angenommen, so ist hiernach  $qr$  gegeben und umgekehrt.

§ 26. Lemma 8. Aufgabe 2. (Fig. 5.) Man soll die Parabel construiren, wenn zwei ihrer Punkte  $M$  und  $N$  und der Brennpunkt  $F$  gegeben sind.



[10] Lösung: Mit  $MN$  als Durchmesser wird ein Halbkreis  $MVN$  beschrieben, dann mache man  $Fn = FN$  und

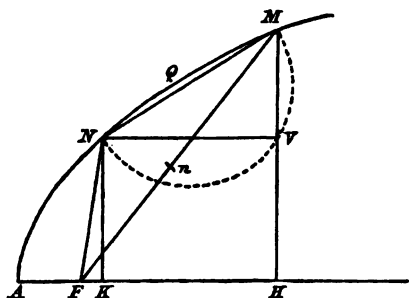


Fig. 5.

erhalte die Differenz  $nM$ ; diese wird aus  $N$  nach  $V$  übertragen, so dass die Sehne  $NV = nM$  wird. Dann wird  $MVH$  gezogen und darauf aus  $F$  die Normale  $FH$  gefällt. Diese wird die Axe der Parabel sein. Endlich macht man

$$AF = \frac{1}{2}(FM - FH)$$

und  $A$  wird der Scheitel der Parabel sein. Mit

diesen Stücken aber kann die Construction der Parabel leicht ausgeführt werden.

Beweis: In der Parabel ist:

$$FM = FH + 2AF$$

$$FN = FK + 2AF,$$

also

$$FM - FN = FH - FK = HK = NV.$$

Da aber der Winkel  $NVM$  ein Rechter ist, so spannt die Sehne  $NM$  den Halbkreis  $NVM$  und  $NV$  ist der Axe  $AH$  parallel.

§ 27. Anmerkung. Eine andere Lösung des Problems haben wir schon oben (§ 9) angegeben.

§ 28. Lemma 9. Aufgabe 3. (Fig. 5.) Gegeben ist das Dreieck  $NFM$ ; man soll die Fläche des Segmentes  $NQM$  ermitteln.

Lösung: Es sei  $p$  der Parameter der Parabel und es werde gesetzt:

$$\begin{aligned} AH &= x & HM &= y \\ AK &= \xi & KN &= \eta, \end{aligned}$$

[11] dann wird die Fläche

$$\text{des Segmentes } AMH = \frac{2}{3}xy$$

$$\text{des Segmentes } ANK = \frac{2}{3}\xi\eta$$

$$\text{des Vierecks } KNMH = \frac{1}{2}(x - \xi)(y + \eta),$$

also wird die Fläche

des Segmentes  $NQM = \frac{2}{3}xy - \frac{2}{3}\xi\eta - \frac{1}{2}(x - \xi)(y + \eta)$   
oder nach gehöriger Reduction:

$$= \frac{1}{6}(xy - \xi\eta - 3x\eta + 3y\xi).$$

Nun ist aber:

$$x = \frac{y^2}{p}, \quad \xi = \frac{\eta^2}{p},$$

also, nach Substitution, die Fläche des Segmentes  $NQM$

$$B = \frac{1}{6p}(y^3 - 3y^2\eta + 3y\eta^2 - \eta^3)$$

oder

$$B = \frac{(y - \eta)^3}{6p} = \frac{MV^3}{24AF}.$$

*Es hängt also die Fläche des Segmentes  $NQM$  einzig und allein von der Differenz der Ordinaten  $KN$  und  $HM$  und von dem Abstände des Brennpunktes vom Scheitel ab.*

Sei nun

$$FM = a, \quad FN = b$$

$$\text{Winkel } NFM = 2c$$

$$NM = k,$$

so wird

$$2ab \cos 2c = a^2 + b^2 - k^2$$

oder, da

$$\cos 2c = 1 - 2 \sin^2 c,$$

$$4ab \sin^2 c = k^2 - (a - b)^2 = MV^2$$

$$MV = 2\sqrt{ab} \sin c.$$

Weiter ist (§ 8) (Fig. 2)

$$FR = \sqrt{ab},$$

[12] also:

$$RW = \sqrt{ab} \sin c$$

$$MW = a - \sqrt{ab} \cos c$$

$\sin RMW^2$

$$= \frac{b \sin^2 c}{a + b - 2\sqrt{ab} \cos c}.$$

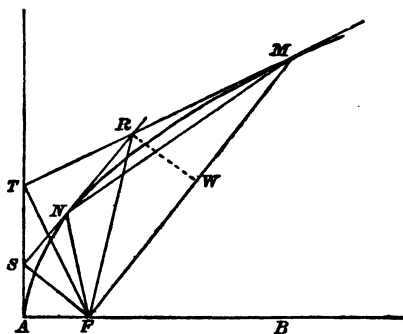


Fig. 2.

Ferner ist (§ 4)

$$AF = FM \sin RMW^2$$

also:

$$AF = \frac{ab \sin^2 c}{a + b - 2\sqrt{ab} \cos c}$$

und daher wegen  $B = \frac{MV^3}{24 AF}$  (Fig. 5) und  $MV = 2\sqrt{ab} \sin c$

$$B = \frac{1}{3} \sqrt{ab} (a + b - 2\sqrt{ab} \cos c) \sin c.$$

§ 29. **Zusatz.** (Fig. 5.) Hieraus wird nun leicht die Fläche des parabolischen Sectors  $NFMQ$  gefunden, indem man dem Segmente  $NQM$  die Fläche des Dreiecks  $FN M$ , welche ist:

$$\frac{1}{2} ab \sin 2c = ab \sin c \cos c,$$

hinzufigt. Nennt man die Fläche des genannten Sectors  $A$ , so wird man erhalten

$$A = \frac{1}{3} \sqrt{ab} (a + b) \sin c + \frac{1}{3} ab \sin c \cos c$$

oder

$$A = \frac{1}{3} \sqrt{ab} (a + b + \sqrt{ab} \cos c) \sin c.$$

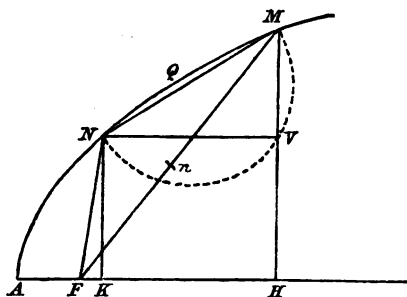


Fig. 5.

### § 30. Lemma 10.

**Aufgabe 4.** (Fig. 5.) Gegeben sind die Seiten des Dreiecks  $NFM$ ; man soll die Entfernung des Brennpunktes  $F$  vom Scheitel  $A$  und die Fläche des parabolischen Sectors  $NFM$  finden.

**Lösung:** Nach trigonometrischen Formeln hat man:

$$4 ab \sin^2 c = (k + a - b)(k - a + b) = k^2 - (a - b)^2$$

$$4 ab \cos^2 c = (k + a + b)(a + b - k) = (a + b)^2 - k^2.$$

[13] Da nun ist (§ 28, 29)

$$AF = \frac{ab \sin^2 c}{a + b - 2\sqrt{ab} \cos c}$$

$$A = \frac{1}{3} \sqrt{ab} (a + b + \sqrt{ab} \cos c) \sin c,$$

so folgt durch Substitution:

$$AF = \frac{k^2 - (a - b)^2}{4(a + b - \sqrt{(a + b)^2 - k^2})}$$

$$A = \frac{1}{3} \sqrt{k^2 - (a - b)^2} (a + b + \frac{1}{2} \sqrt{(a + b)^2 - k^2}).$$

§ 31. **Zusatz 1.** Da

$$(a + b) - \sqrt{(a + b)^2 - k^2} = \frac{k^2}{a + b + \sqrt{(a + b)^2 - k^2}},$$

so hat man auch:

$$AF = \frac{(k^2 - (a - b)^2)(a + b + \sqrt{(a + b)^2 - k^2})}{4k^2}.$$

§ 32. **Zusatz 2.** Wenn der Winkel  $c = \frac{1}{2} NFM$  gleich  $90^\circ$  wird, so wird  $k = a + b$  und daher in diesem Falle:

$$AF = \frac{ab}{a + b} = \frac{ab}{k}$$

$$A = \frac{1}{3}(a + b) \sqrt{ab} = \frac{1}{3} k \sqrt{ab}.$$

§ 33. **Anmerkung.** Die Buchstaben  $a, b, c, k$ , von denen wir in den vorhergehenden Sätzen Gebrauch gemacht haben, werden wir im Folgenden in der gleichen Bedeutung beibehalten, ohne dieselbe immer zu wiederholen.

[14] § 34. **Lemma 11.**

**Aufgabe 5.** (Fig. 2.) Gegeben sind die Seiten des Dreieckes  $NFM$ ; man soll den Winkel  $RMF$  bez.  $SNF$  finden.

Lösung: Da nach § 28:

$$\frac{\sin RMF^2}{b \sin c^2} = \frac{a + b - 2\sqrt{ab} \cos c}{b \sin c^2}$$

und nach § 30:

$$4ab \sin c^2 = k^2 - (a - b)^2$$

$$4ab \cos c^2 = (a + b)^2 - k^2,$$

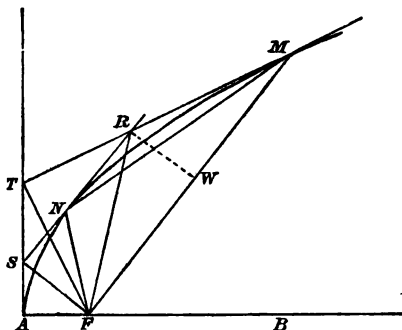


Fig. 2.

so erhält man nach durchgeführter Substitution:

$$\sin RMF^2 = \frac{k^2 - (a - b)^2}{4a(a + b - \sqrt{(a + b)^2 - k^2})}$$

und auf ähnliche Weise (§ 14)

$$\sin SNF^2 = \frac{k^2 - (a - b)^2}{4b(a + b - \sqrt{(a + b)^2 - k^2})}.$$

§ 35. **Zusatz 1.** Da nach § 1

$$\text{Winkel } MFB = 2RMF,$$

so wird

$$\cos MFB = 1 - 2 \sin RMF^2$$

und daher

$$\cos MFB = 1 - \frac{k^2 - (a - b)^2}{2a(a + b - \sqrt{(a + b)^2 - k^2})}.$$

§ 36. **Zusatz 2.** Wenn der Winkel  $NFM = 180^\circ$  wird, so wird  $a + b = k$  und daher

$$\cos MFB = 1 - \frac{2b}{a + b} = \frac{a - b}{a + b}.$$

[15] § 37. **Anmerkung.** Der Winkel  $RMF$  und zudem der Winkel  $RMN$  können auch noch auf andere Weise durch  $a, b, c$  ausgedrückt werden, wenn man die Cotangente derselben sucht. Es ist nämlich:

$$FRM = 180^\circ - c - RMF,$$

also:

$$\frac{FR}{FM} = \frac{\sin RMF}{\sin(RMF + c)}.$$

Nun ist aber nach § 8

$$FR : FM = \sqrt{b} : \sqrt{a}.$$

Nennen wir also den Winkel  $RMF = v$ , so wird sein

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin v : \sin(v + c),$$

oder wegen  $\sin(v + c) = \sin v \cos c + \cos v \sin c$ :

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin v : (\sin v \cos c + \cos v \sin c)$$

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \frac{1}{\sin c \cotg v + \cos c}.$$

Hieraus folgt:

$$\cotg v = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{cosec} c - \cotg c.$$

Weiter hat man, wenn man den Winkel  $RMN = \omega$  nennt, wegen  $TRN = RFM = c$ , (§ 7):

$$MNR = c - \omega$$

und daher

$$NR : RM = \sin \omega : \sin(c - \omega).$$

Nun ist aber nach § 14

$$NR : RM = \sqrt{b} : \sqrt{a},$$

also:

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin \omega : \sin(c - \omega)$$

oder:

$$\sqrt{b} : \sqrt{a} = \sin \omega : (\sin c \cos \omega - \cos c \sin \omega).$$

Hieraus wird:

$$\cotg \omega = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{cosec} c + \cotg c.$$

[16] Da aber

$$\cotg v = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{cosec} c - \cotg c,$$

so erhält, dass man nur durch Wechsel des Zeichens durch dieselbe Formel sowohl die  $\cotg$  von  $v$  als jene von  $\omega$  erhalten kann.

§ 38. Lemma 12. (Fig. 6.)

Wenn man durch die Mitte  $G$  der Sehne  $NM$  eine Parallele  $RQGW$  zur Axe und die auf dieser Geraden sich schneidenden Tangenten  $RN$  und  $RM$  an die Endpunkte der Sehne zieht, so wird, wenn noch  $Q$  mit dem Brennpunkte  $F$  durch die Gerade  $QEF$  verbunden wird,  $RQ = QG = QE$ .

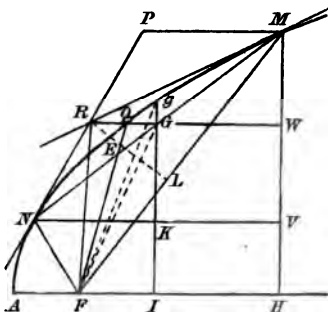


Fig. 6.

Beweis: Wird die Tangente in  $N$  von der durch  $M$  zur Axe parallel gelegten Geraden  $MP$  in  $P$  getroffen, so folgt aus den Eigenschaften der Parabel:

$$RQ : PM = NR^2 : NP^2.$$

Es ist aber auch

$$NR : NP = NG : NM = 1 : 2,$$

also

$$RQ : PM = 1 : 4;$$

und ferner:

$$RG : PM = 1 : 2,$$

also

$$RQ : RG = 1 : 2$$

und daher:

$$RQ = QG.$$

Nun ist ferner die Gerade, welche die Parabel in  $Q$  berührt, der Sehne  $NM$  parallel und gegen die Geraden  $QF$  und  $QG$  gleich geneigt, also wird

$$\text{Winkel } QEG = QGE$$

und daher

$$QE = QG = RQ.$$

[17] § 39. **Anmerkung.** Man kann eine Beziehung zwischen  $FQ$ ,  $QG$  und  $NM$  nachweisen, nämlich:

$$NM^2 = 16 FQ \cdot QG.$$

Ähnlich findet man:

$$NP^2 = 16 FN \cdot QR = 16 FN \cdot QG;$$

und man hat daher

$$NP : NM = \sqrt{FN} : \sqrt{FQ}$$

oder

$$NR : NG = \sqrt{FN} : \sqrt{FQ}.$$

§ 40. **Lemma 13.** (Fig. 6.) Wenn durch die Mitte  $G$  der Sehne  $NM$  die zur Axe senkrechte Ordinate  $JGg$  gezogen und  $g$  mit  $F$  verbunden wird, so ist  $gF = \frac{FN + FM}{2}$ .

Beweis: Es ist nämlich

$$Fg - FN = NK$$

$$FM - Fg = KV = NK,$$

also:

$$Fg - FN = FM - Fg$$

oder

$$Fg = \frac{FM + FN}{2}.$$

§ 41. **Anmerkung.** Dieser Satz wird sehr viel gebraucht und ist auch auf die anderen Kegelschnitte anwendbar.

[18] § 42. **Lemma 14.** (Fig. 6.) Wenn  $FQ$ ,  $QG$  und  $Fg$  wie in den beiden vorausgehenden Sätzen gezogen werden, so ist  $Fg = FQ + QG$ .

Beweis: Es ist nämlich:

$$GW = IH = FM - Fg$$

$$QW = FM - FQ.$$

Also durch Subtraction:

$$QW - GW = Fg - FQ = QG$$

und daher

$$Fg = FQ + QG.$$

§ 43. **Zusatz.** Weil  $QE = QG$  (§ 38), so ist auch:

$$Fg = FQ + QE.$$

§ 44. **Lemma 15. Aufgabe 6.** (Fig. 6.) Gegeben sind die Seiten des Dreiecks  $FNM$ ; man soll die Distanz  $FQ$  ermitteln.

Lösung: Da nach § 42 und 40:

$$Fg = FQ + QG = \frac{FN + FM}{2}$$

und weiter nach § 39

$$NM^2 = 16 FQ \cdot QG,$$

so wird

$$FQ + \frac{NM^2}{16 FQ} = \frac{FN + FM}{2}.$$

[19] Nennt man also  $FQ = q$ , so wird

$$q = \frac{a + b}{4} + \frac{1}{4} \sqrt{(a + b)^2 - k^2}.$$

§ 45. **Anmerkung.** Nach Aenderung des Zeichens giebt dieselbe Formel  $QE$ :

$$QE = QG = \frac{a + b}{4} - \frac{1}{4} \sqrt{(a + b)^2 - k^2}.$$



§ 46. **Zusatz 1.** Hieraus folgt:

$$FQ - QE = FE = \frac{1}{2} \sqrt{(a+b)^2 - k^2}.$$

§ 47. **Zusatz 2.** Es ist nach § 30

$$(a+b)^2 - k^2 = 4ab \cos^2 c;$$

also:

$$FE = \sqrt{ab} \cos c = FR \cdot \cos RFM \quad (\S 8).$$

§ 48. **Lemma 16.** (Fig. 6.) Wird von R das Lot RL auf FM gefällt, so ist FL = FE und RL = GK.

Beweis: Es ist nämlich (§ 8)

$$FR = \sqrt{ab}$$

$$\text{Winkel } RFM = c,$$

also:

$$FL = \sqrt{ab} \cos c$$

$$RL = \sqrt{ab} \sin c.$$

[20] Da aber ferner (§ 30, 47)

$$\sqrt{ab} \sin c = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 - (a-b)^2} = \frac{1}{2} MV = GK$$

$$\sqrt{ab} \cos c = FE,$$

so folgt

$$FL = FE \quad \text{und} \quad RL = GK.$$

§ 49. **Lemma 17.** (Fig. 7.) Wenn drei beliebige Punkte N, Q, M der Parabel und ihr Brennpunkt durch die Geraden FN, FQ, FM, NQ, QM, NM

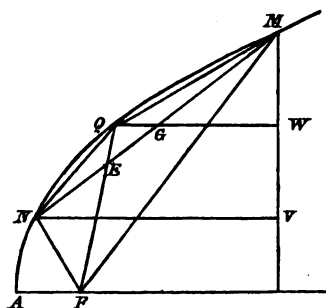


Fig. 7.

verbunden werden, so verhalten sich die Flächen der Dreiecke NFQ und QFM wie die Abschnitte NE und EM und die Segmente NMQ, NQ und QM verhalten sich wie die Cuben der Geraden NM, NG, GM, wobei QG parallel zur Axe gezogen ist.

Beweis: Die Dreiecke NQE und EQM sind, da sie die gleiche Spitze Q haben, gleich hoch und ihre Flächen verhalten sich also

wie ihre Grundlinien  $NE$  und  $EM$ ; ebenso sind die Dreiecke  $NEF$  und  $EFM$ , da sie die Spitze  $F$  gemeinsam haben, gleich hoch und sie verhalten sich daher ebenfalls wie  $NE$  zu  $EM$ ; also durch Zusammensetzen:

$$\triangle NFQ : \triangle QFM = NE : EM.$$

Zieht man sodann  $NV$  parallel zur Axe und fällt darauf von  $M$  das Lot  $MV$ , so werden nach § 28 die Flächen der Segmente:

$$\text{Segm. } NMQ = \frac{\overline{MV}^3}{24 \overline{AF}}$$

$$\text{Segm. } NQ = \frac{\overline{VW}^3}{24 \overline{AF}}$$

$$\text{Segm. } QM = \frac{\overline{MW}^3}{24 \overline{AF}},$$

also:

$$NMQ : \overline{MV}^3 = NQ : \overline{VW}^3 = QM : \overline{MW}^3.$$

[21] Diese Abscissen  $MV$ ,  $VW$  und  $MW$  verhalten sich aber wie  $NM$ ,  $NG$  und  $GM$ , also ist der Satz bewiesen.

§ 50. **Anmerkung.** Wenn der Winkel  $NFM$  20 bis 30 Grad nicht überschreitet, dann kann man die Segmente  $NQ$  und  $QM$  im Verhältniss zu den Flächen der Dreiecke  $NFQ$  und  $QFM$ , zu denen sie gehören, ihrer Kleinheit halber vernachlässigen, so dass die Sektoren  $NFQ$  und  $QFM$  sehr nahe im Verhältniss der Abschnitte  $NE$  und  $EM$  stehen werden, welche auf der zum ganzen Bogen  $NM$  gehörigen Sehne von  $FQ$  gemacht werden.

§ 51. **Lemma 18.**  
**Aufgabe 7.** (Fig. 8.)  
Gegeben seien vier Gerade  $BL$ ,  $BI$ ,  $DK$ ,  $DH$ ; man soll eine fünfte  $LH$  so ziehen,

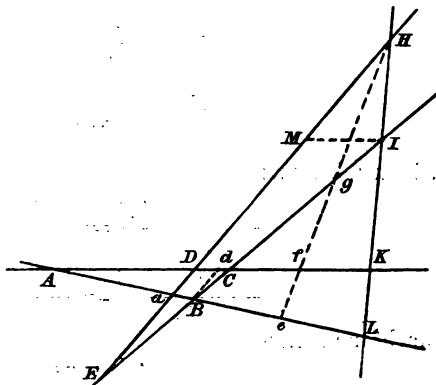


Fig. 8.

dass die Abschnitte  $HI$ ,  $IK$ ,  $KL$  in einem gegebenen Verhältnisse stehen.

Erste Lösung. In dem Dreiecke  $ABC$ , welches von den in  $I$ ,  $K$ ,  $L$  schneidenden Geraden gebildet wird, bestimme man auf  $AB$  den Punkt  $e$  durch

$$AB:Be = KI:IH$$

und hierauf auf  $BC$  den Punkt  $g$  durch

$$BC:Cg = LK:KH$$

oder auf  $AC$  den Punkt  $f$  durch

$$AC:Cf = LI:IH.$$

Die Punkte  $e$ ,  $g$ ,  $f$  liegen dann auf einer Geraden, welche die vierte gegebene Gerade  $ED$  in dem Punkte  $H$  treffe. Dann bestimme man den Punkt  $M$  durch

$$HD:DM = HK:IK.$$

Wird schliesslich durch  $M$  eine Parallele zu  $AC$  gezogen, so wird diese  $BC$  in  $I$  treffen und  $HI$  wird die gesuchte Gerade sein (siehe § 52).

[22] Zweite Lösung. Durch Trigonometrie hat man:

$$\frac{\sin CKI}{AL} = \frac{\sin BAD}{KL}$$

$$\frac{\sin CKI}{DH} = \frac{\sin ADE}{HK}$$

$$\frac{\sin CIK}{EH} = \frac{\sin DEB}{HI}$$

$$\frac{\sin CIK}{BL} = \frac{\sin ABE}{IL}$$

Hieraus kommt:

$$\frac{AL \sin BAD}{KL} = \frac{DH \sin ADE}{HK}$$

$$\frac{EH \sin DEB}{HI} = \frac{BL \sin ABE}{IL}$$

Macht man nun

$$KL:HK = 1:m$$

$$HI:IL = 1:n$$

so wird sein:

$$m(AB + BL) \sin BAD = DH \sin ADE$$

$$n(ED + DH) \sin DEB = BL \sin ABE.$$

Hieraus folgt aber

$$DH = \frac{m(AB + BL) \sin BAD}{\sin ADE}$$

und

$$DH = \frac{BL \sin ABE - n \cdot ED \sin DEB}{n \cdot \sin DEB},$$

also:

$$BL = \frac{n \cdot \sin DEB (m \cdot AB \sin BAD + ED \sin ADE)}{\sin ABE \sin ADE - mn \sin BAD \sin DEB}.$$

Wird hieraus  $BL$  berechnet, so findet man leicht  $DH$  und damit die Lage der Geraden  $HL$ .

[23] § 52. Anmerkung 1. Der Beweis der ersten Lösung ergibt sich aus Lemma 6 und 7 (§ 24, 25). Es sind nämlich die Geraden  $AB$ ,  $AC$ ,  $BC$ ,  $eg$  und  $LH$  Tangenten einer Parabel.

Wenn man es vorzieht in der Formel, auf der die zweite Lösung beruht, nur von den Strecken Gebrauch zu machen, so kann man sie in folgender Weise umändern. Zunächst kann man sie in folgende überführen:

$$BL = \frac{mn \frac{AB \sin BAD}{\sin ADE} + n \cdot ED}{\frac{\sin ABE}{\sin DEB} - mn \frac{\sin BAD}{\sin ADE}}.$$

Zieht man nun  $Bd$  parallel zu  $ED$ , so wird sein:

$$\text{Winkel } AdB = ADE$$

$$\frac{AB \sin BAD}{\sin ADE} = Bd$$

$$\frac{\sin ABE}{\sin DEB} = \frac{Ea}{aB}$$

$$\frac{\sin BAD}{\sin ADE} = \frac{aD}{Aa}$$

und daher

$$BL = \frac{m \cdot n \cdot Bd + n \cdot ED}{\frac{Ea}{aB} - m \cdot n \frac{aD}{Aa}}$$

oder

$$BL = \frac{n \cdot aB \cdot Aa \cdot (m \cdot Bd + ED)}{Ea \cdot Aa - m \cdot n \cdot aD \cdot aB}.$$

§ 53. **Anmerkung 2.** Eine andere Lösung dieses Problems findet man in *Newton's Arithmetica universalis*. Dieser hat es zur Ermittlung der geocentrischen Distanz des Cometen benutzt, indem er die Annahme machte, dass ein kleines Stück der Bahn als eine Gerade betrachtet werden dürfe, und weiter, dass die vier Punkte *H, I, K, L* die Projectionen von vier Cometenörtern auf die Ekliptik seien.

[24] § 54. **Lemma 19. Aufgabe 8.** (Fig. 9.) Gegeben sind vier Gerade *AE, AG, BF, BH*; man soll denselben ein gegebenes Viereck *EFGH* einschreiben.

**Lösung:** Da die Geraden ihrer Lage nach gegeben sind, so kennt man die Winkel *CAD, CBD, CAB* und *CBA*.

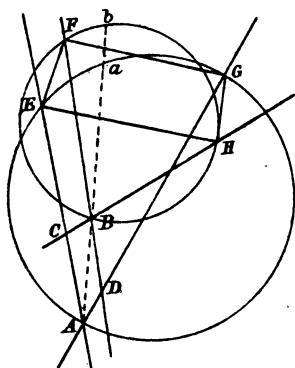


Fig. 9.

Zieht man nun durch gegenüberliegende Ecken des Vierecks *EFGH*, nämlich *EG* einerseits und *FH* andererseits Kreislinien so, dass die Bogen *EG* und *FH* doppelt so gross werden, als die Winkel *EAG* bez. *FBH*, so ist leicht zu sehen, dass die Punkte *A* und *B* auf diesen Peripherien liegen müssen. Macht man weiter  $Ea = 2 \angle CAB$  und  $Fb = 2 \angle ABD$  und zieht durch die Punkte *a, b* die Gerade *baBA*, so wird diese auf den beiden Peripherien die Lagen der Punkte *A* und *B* angeben. Zieht man endlich die

Geraden *HBC* und *FBD*, so werden *EA, GA, FB* und *HB* jene vier Geraden sein, denen das Viereck *EFGH* einzuschreiben war.

§ 55. **Anmerkung.** Es ist, wie man leicht erkennt, nicht nöthig, dass die Seiten des Vierecks *EFGH* in demselben

Maasse gegeben seien, wie die Seiten des Vierecks  $ABCD$ , sondern es genügt, dass die Winkel  $E, F, G, H$  und das Verhältniss der Seiten bekannt sei. Aus diesem Grunde kann das Problem dann von Nutzen sein, wenn die Bahn eines Cometen schon sehr nahe bekannt ist. Das Problem wird nämlich, wenn die Krümmung desjenigen Theiles der Cometenbahn, den derselbe im Intervall von vier Beobachtungen zurücklegt, sehr nahe bekannt ist, besser genügen, als das vorhergehende, welches einen Theil der Bahn als geradlinig voraussetzt.

[25] § 56. Lemma 20. (Fig. 10.) Wenn man die Sehne  $NM$  einer Parabel in  $G$  halbt,  $GQ$  parallel zur Axe  $AF$  zieht,  $Q$  mit dem Brennpunkte  $F$  verbindet und endlich die Sehne  $NM$  derartig in die Lage  $nm$  bringt, dass  $FQ$  dieselbe rechtwinklig halbt, dann liegen die Punkte  $n$  und  $m$  auf einer Parabel  $nQm$ , deren Scheitel  $Q$ , deren Axe  $FQ$  und deren Brennpunkt  $F$  ist; ausserdem verhalten sich die Flächen der Sektoren  $NFM$  und  $nFm$  wie die Quadratwurzeln aus den Halbparametern der beiden Parabeln.

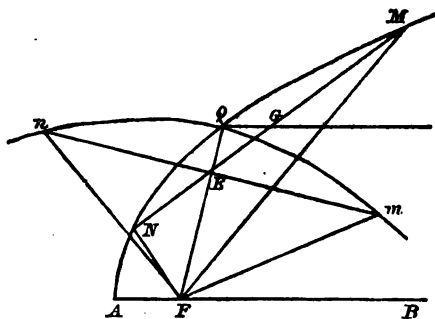


Fig. 10.

Beweis: Da  $NG = GM$  und  $GQ$  der Axe parallel ist, so ist die Sehne  $NM$  parallel zur Tangente der Parabel in  $Q$  und ferner ist

$$\begin{aligned} \text{Winkel } NEF &= \frac{1}{2} QFB \\ \text{und } GQ &= QE \quad (\S 38). \end{aligned}$$

Ferner ist:

$$\overline{NM}^2 = 16 FQ \cdot QG$$

und daher auch:

$$\overline{nm}^2 = 16 FQ \cdot QE.$$

Dies ist aber die Gleichung einer Parabel, deren Axe und Focaldistanz  $FQ$  ist.

Ferner wird sich, wegen  $QG = QE$ , die Fläche des Segmentes  $NQM$  zur Fläche des Segmentes  $nQm$  verhalten, wie der Sinus des Winkels  $QGE = QEG = NEF$  zu 1; in demselben Verhältnisse stehen aber auch die Flächen der Dreiecke  $NFM$  und  $nFm$ , weil die Grundlinien  $NM$  und  $nm$  gleich sind. Also stehen die ganzen Sektoren  $NFM$  und  $nFm$  im Verhältniss des  $\sin NEF$  zu 1. Nun ist aber (§ 4)

$$\sin NEF : 1 = \sqrt{AF} : \sqrt{FQ} = \sqrt{2AF} : \sqrt{2FQ}.$$

Da nun  $2AF$  und  $2FQ$  die Halbparameter sind, so ist der Satz bewiesen.

[26] § 57. **Anmerkung.** Dieser Satz lässt sich mit entsprechender Begrenzung auch auf die andern Kegelschnitte ausdehnen. Es ist auch ohne besondere Darlegung klar, dass er in der Weise umgekehrt werden kann, dass man aus der Parabel  $nQm$  eine beliebige andere ableiten kann, welche durch den Scheitel  $Q$  hindurchgeht.

§ 58. **Lemma 21. Aufgabe 9.** (Fig. 10.) *Gegeben sei die Sehne  $NM$  und der Pfeil  $QG$ ; man soll die Fläche des Segmentes  $NQM$  und des Sectors  $NFM$  finden.*

**Lösung:** Die Fläche des Segmentes  $nQm$  ist  $\frac{2}{3} \overline{QE} \cdot \overline{nm}$  und die des Dreieckes  $nFm$  ist  $\frac{1}{2} \overline{FE} \cdot \overline{nm}$ . Also wird

$$\text{Sector } nFmQ = \frac{2}{3} \overline{QE} \cdot \overline{nm} + \frac{1}{2} \overline{FE} \cdot \overline{nm}$$

$$\text{oder} \quad nFmQ = \frac{1}{6} \overline{QE} \cdot \overline{nm} + \frac{1}{2} \overline{FQ} \cdot \overline{nm}.$$

Nun ist aber (§ 56)

$$\begin{aligned} \text{Sector } nFm : \text{Sector } NFM &= \text{Segm. } nQm : \text{Segm. } NQM \\ &= \sqrt{FQ} : \sqrt{AF} \end{aligned}$$

$$nm = NM$$

$$QE = QG,$$

also wird:

$$\text{Segm. } NQM = \frac{2}{3} \overline{NM} \cdot \overline{QG} \sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

$$\text{Sector } NFM = \overline{NM} \left( \frac{1}{6} \overline{QG} + \frac{1}{2} \overline{FQ} \right) \sqrt{\frac{AF}{FQ}}.$$

Da nun

$$\overline{NM}^2 = 16 \overline{QG} \cdot \overline{FQ},$$

[27] so wird

$$\text{Segm. } NQM = \frac{1}{3} \sqrt{QG^3 \cdot AF}$$

$$\text{Sector } NFM = \left( \frac{1}{3} QG^3 + \frac{1}{3} NM^3 \right) \sqrt{\frac{AF}{QG}}$$

§ 59. Zusatz. Aehnlich erhält man:

$$\text{Sector } NFM = NM \left( \frac{NM^3}{96 \cdot FQ} + \frac{1}{3} FQ \right) \sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

§ 60. Lemma 22. Aufgabe 10. (Fig. 10.) Gegeben sei die Sehne  $NM = k$  und die Summe der Seiten  $FM + FN = a + b$ ; man soll die Fläche des Sectors  $NFM$  finden.

Lösung. Da man hat (§ 58):

$$\text{Sector } NFM = NM \left( \frac{1}{3} QG + \frac{1}{3} FQ \right) \sqrt{\frac{AF}{FQ}}$$

und weiter nach § 44, 45:

$$FQ = \frac{1}{4} (a + b + \sqrt{(a + b)^2 - k^2})$$

$$QG = \frac{1}{4} (a + b - \sqrt{(a + b)^2 - k^2}),$$

so folgt nach Substitution und ausgeführter Reduction:

$$\text{Sector } NFM = \frac{k(a + b + \frac{1}{2} \sqrt{(a + b)^2 - k^2})}{3 \sqrt{a + b + \sqrt{(a + b)^2 - k^2}}} \sqrt{AF}.$$

[28] § 61. Zusatz 1. Da

$$(a + b + \sqrt{(a + b)^2 - k^2})(a + b - \sqrt{(a + b)^2 - k^2}) = k^2,$$

so folgt auch:

$$\begin{aligned} & \text{Sector } NFM \\ &= \sqrt{a + b - \sqrt{(a + b)^2 - k^2}} (a + b + \frac{1}{2} \sqrt{(a + b)^2 - k^2}) \frac{\sqrt{AF}}{3}. \end{aligned}$$

§ 62. Zusatz 2. Der zweite Factor dieser Formel, nämlich  $a + b + \frac{1}{2} \sqrt{(a + b)^2 - k^2}$ , geht nach leichter Aenderung über in

$$\frac{1}{2} (a + b) + \frac{1}{2} (a + b + \sqrt{(a + b)^2 - k^2}),$$

so dass man die Formel selbst in folgende überführen kann

$$\begin{aligned} & \frac{3 \text{ Sect. } NFM}{\sqrt{AF}} \\ &= \frac{1}{2} (a + b) \sqrt{(a + b) - \sqrt{(a + b)^2 - k^2}} + \frac{1}{2} k \sqrt{(a + b) + \sqrt{(a + b)^2 - k^2}}, \end{aligned}$$



oder wenn man der Kürze halber  $a + b = g$  setzt,

$$\frac{3 \text{ Sect. } NFM}{VAF} = \frac{1}{2}g \sqrt{g - \sqrt{g^2 - k^2}} + \frac{1}{2}k \sqrt{g + \sqrt{g^2 - k^2}}.$$

§ 63. Zusatz 3. Hieraus aber folgt:

$$\begin{aligned} & \frac{3 \text{ Sect. } NFM}{VAF} \\ &= \frac{1}{2}g \sqrt{\frac{g+k}{2}} - \frac{1}{2}g \sqrt{\frac{g-k}{2}} + \frac{1}{2}k \sqrt{\frac{g+k}{2}} + \frac{1}{2}k \sqrt{\frac{g-k}{2}} \end{aligned}$$

und auch:

$$\frac{3 \text{ Sect. } NFM}{VAF} = \frac{1}{2}(g+k) \sqrt{\frac{g+k}{2}} - \frac{1}{2}(g-k) \sqrt{\frac{g-k}{2}},$$

[29] oder am kürzesten:

$$\frac{3 \text{ Sect. } NFM}{VAF} = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Die Fläche  $A$  des Sectors wird also:

$$A = \frac{1}{3} VAF \left( \left(\frac{a+b+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{a+b-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

§ 64. Anmerkung 1. Für diese sehr schöne Formel, die wir hier durch ein weitläufiges Rechnungsverfahren ermittelt haben, werden wir unten einen kürzeren Beweis geben, wenn von der Ermittlung der Zeit, in welcher ein Comet einen bestimmten Bogen seiner parabolischen Bahn durchmisst, die Rede sein wird. Dann werden wir auch angeben, was man erhält, wenn die Bahn ein beliebiger Kegelschnitt ist und welche Aenderungen und Beschränkungen dann eintreten.

§ 65. Anmerkung 2. Das sind die hauptsächlichsten Sätze, welche ich vorausschicken wollte, um die Theorie der parabolischen Cometenbewegung um so eleganter darstellen zu können. Wir werden in der That sehen, dass die bisher abgeleiteten Formeln sich einfacher gestalten, wenn wir an Stelle der Fläche des Sectors die Zeit einführen, die der Comet zum Durchlaufen des Bogens braucht.

[30] Zweiter Theil.

Die wichtigsten Eigenschaften der parabolischen  
Bewegung der Cometen.

§ 66. Gesetz 1. *Alle Himmelskörper, welche sich um die Sonne bewegen, Planeten sowohl als Cometen, werden durch Centralkräfte getrieben und werden von der Sonne angezogen, so dass die Anziehung umgekehrt proportional dem Quadrat der Distanz ist.*

§ 67. Gesetz 2. *Die Zeiten, in welchen sie die Bogen ihrer Bahn durchlaufen, sind den Flächen proportional, welche der Radiusvector, d. h. die Verbindungslinie der Sonne mit den Cometen oder Planeten, überstreicht.*

§ 68. Gesetz 3. *Die Bahnen, in denen sie sich um die Sonne bewegen, sind nothwendig Kegelschnitte, in deren einem Brennpunkte sich die Sonne befindet.*

[31] § 69. Gesetz 4. *Wenn verschiedene Cometen und Planeten unter sich verglichen werden, so ist die Zeit, in welcher der Comet oder Planet einen Bogen seiner Bahn durchläuft, proportional der vom Radiusvector überstrichenen Fläche, dividirt durch die Quadratwurzel aus dem Halbparameter der Bahn.*

§ 70. Anmerkung. Es ist hier nicht der Ort auseinanderzusetzen, was in diesen Gesetzen der Beobachtung und was den Principien der Mechanik zu verdanken ist. Die Grundlage hat *Kepler* gegeben, indem er die drei letzten Gesetze mit vieler Mühe aus den Beobachtungen ableitete und sie auf die Planeten anwandte. Das erste Gesetz hat *Newton* aus Beobachtungen deducirt, dann aber alles aus den Principien der Mechanik abgeleitet, indem er die ersten Fundamente einer Theorie der Centralkräfte schuf. Das dritte Gesetz und namentlich die Nothwendigkeit desselben hat *Joh. Bernoulli* mit gewohntem Scharfsinn ins volle Licht gesetzt. Diese Gesetze sind so einleuchtend und so allgemein bekannt, dass es Zeitverschwendung wäre, wenn ich von Neuem auf ihren Nachweis einginge. Sie sollen hier als Principien hingestellt sein, aus welchen die specielleren Eigenschaften der Bewegungen der Himmelskörper abzuleiten sind. Diese letzteren aber will ich in natürlicher und stetiger Folge, soweit sie zu unserem Ziele

beitragen können, aus jenen Gesetzen ableiten, indem ich bereits bekannte vorausschicke und unter die neuen einfüge.

[32] § 71. **Lehrsatz 1.** (Fig. 11.) *Wenn zwei oder mehrere Cometen in elliptischen Bahnen sich bewegen, deren grosse Axen gleich sind, so sind auch die Umlaufszeiten gleich.*

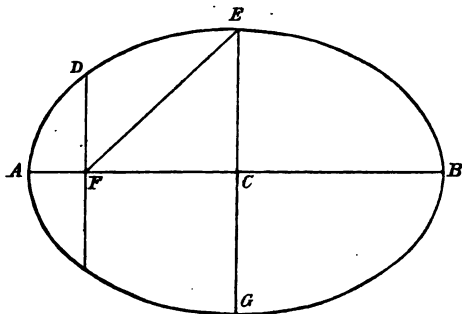


Fig. 11.

Beweis: Sei  $F$  das Centrum der Sonne und zugleich Brennpunkt der Ellipse  $ADB$  mit der grossen Axe  $AB$ , der kleinen Axe  $EG$  und dem Halbparameter  $FD$ ; dann ist nach den Eigenschaften der Ellipse:

$$FD \cdot AC = CE^2 = AF \cdot FB.$$

Bezeichnet ferner  $\frac{1}{\pi}$  das Verhältniss des Kreisdurchmessers zur Peripherie, so ist die Fläche der Ellipse

$$A = \pi \cdot AC \cdot CE.$$

Nach Gesetz 4 (§ 69) ist aber die Zeit proportional der Fläche, dividirt durch die Quadratwurzel aus dem Halbparameter. Nennt man also  $T$  die Umlaufszeit, so wird

$$T = \frac{\pi \cdot AC \cdot CE}{m \sqrt{FD}}.$$

Nun ist aber

$$\sqrt{FD} = \frac{CE}{\sqrt{AC}},$$

also wird:

$$T = \frac{\pi}{m} AC^{\frac{3}{2}}.$$

Die Umlaufszeit hängt also einzig und allein von der grossen Axe der Ellipse ab. Damit ist unsere Behauptung bewiesen zugleich mit dem folgenden

[33] § 72. **Lehrsatz 2.** (Fig. 11.) *Die Umlaufszeiten der in Ellipsen sich bewegenden Cometen und Planeten verhalten sich wie die dreihalbten Potenzen der grossen Halbachsen oder der mittleren heliocentrischen Entfernungen.*

Beweis: Die mittlere Distanz ist nämlich

$$FE = \frac{AF + FB}{2} = AC;$$

nach dem vorausgehenden Lehrsatz ist aber

$$T = \frac{\pi}{m} AC^{\frac{3}{2}},$$

also ist auch

$$T = \frac{\pi}{m} FE^{\frac{3}{2}}.$$

§ 73. **Aufgabe 12.** *Man soll die Distanzen und Umlaufszeiten der Cometen und Planeten, sowie auch deren Verhältnisse in Zahlen ausdrücken.*

Erste Lösung. Da die Erde sich in einer Ellipse bewegt, so setze man die mittlere Distanz derselben von der Sonne = 100 000 und drücke in denselben Einheiten alle anderen Distanzen aus. Sodann zähle man die Zeit in gewöhnlichen Tagen und deren Decimaltheilen. Es ist aber die Umlaufszeit der Erde gleich 365.25659 Tage. Daher haben wir [34] in der Formel des vorhergehenden Lehrsatzes:

$$AC = FE = 100\,000, \quad T = 365.25659;$$

damit wird der Werth von  $m$  gefunden, welcher das gesuchte Verhältniss ist. Es wird

$$m = \frac{\pi \cdot AC^{\frac{3}{2}}}{T}$$

und daher

$$\begin{aligned} \log AC^{\frac{3}{2}} &= 7.500\,0000 \\ \log \pi &= 0.497\,1499 \\ \hline &7.997\,1499 \\ \log T &= 2.562\,5980 \\ \hline \log m &= 5.434\,5519 \end{aligned}$$

woraus

$$m = 271\,989.4$$

und daher

$$T = \frac{\pi \cdot A C^{\frac{3}{2}}}{271\,989.4}.$$

Zweite Lösung. Seit Erfindung der Decimalbrüche ist es bequemer, die mittlere Distanz der Erde gleich 1 zu setzen. Setzt man daher

$$T = n\pi AC^{\frac{3}{2}}$$

und nimmt  $AC = 1$ , so folgt

$$n = \frac{T}{\pi}$$

und man hat

$$\log T = 2.562\,5980$$

$$\log \pi = 0.497\,1499$$

$$\log n = 2.065\,4481.$$

woraus

$$n = \frac{1}{m} = 116.2648.$$

[35] Ist daher die Fläche eines beliebigen Sectors gleich  $A$ , der Halbparameter gleich  $s$ , die Zeit, in der der Bogen durchlaufen wird, in Tagen ausgedrückt gleich  $T$ , so wird

1) wenn die mittlere Distanz der Erde = 100 000 gesetzt wird,

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{nA}{\sqrt{s}} = \frac{A}{\sqrt{s} \cdot 271\,989.4};$$

2) wenn die mittlere Distanz der Erde = 1 gesetzt wird:

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{nA}{\sqrt{s}} = \frac{A \cdot 116.2648}{\sqrt{s}}.$$

§ 74. Anmerkung. Den Buchstaben  $\pi$ ,  $m$ ,  $n$ ,  $A$ ,  $T$  werden wir im Folgenden meistens dieselbe Bedeutung beilegen wie hier, wie wir auch die Bedeutung der oben (§ 33) eingeführten Buchstaben  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $k$  beibehalten wollen. Die Buchstaben  $m$ ,  $T$ ,  $A$  hat schon Euler in der »*Theoria Cometarum et Planetarum*« im selben Sinne benutzt.

§ 75. Aufgabe 13. Man soll die Geschwindigkeit eines in einem Kreise sich bewegenden Himmelskörpers finden.

Lösung. Ist  $r$  der Halbmesser des Kreises,  $r^2\pi$  seine Fläche, so wird die Umlaufszeit

$$T = \frac{r^2\pi}{m\sqrt{r}} = \frac{\pi}{m} r^{\frac{3}{2}}.$$

[36] In dieser Zeit wird die Peripherie  $2r\pi$  beschrieben. Wenn man daher die Geschwindigkeit ausdrückt durch den Bogen, der in einem Tage durchlaufen wird, und sie  $K$  nennt, so wird

$$K = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2m}{\sqrt{r}}.$$

§ 76. Lehrsatz 3. (Fig. 12.) Wenn ein Comet sich in einer Parabel  $AM$  bewegt, so verhält sich seine Geschwindigkeit an einer beliebigen Stelle  $M$  zu der Geschwindigkeit, mit welcher er sich in derselben Entfernung von der Sonne  $F$  auf einer Kreisbahn bewegen würde, wie  $\sqrt{2}:1$ .

Beweis: Da die Zeiten sich wie die Flächen, dividirt durch die Quadratwurzeln aus den Halbparametern verhalten (§ 69), so wird die Zeit, in der der unendlich kleine parabolische Bogen  $MN$  durchlaufen wird, sein

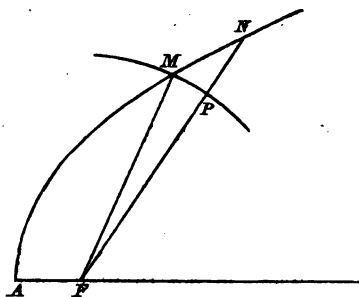


Fig. 12.

$$T = \frac{\text{Sect. } MFN}{m\sqrt{2AF}},$$

die Zeit aber, in der der Kreisbogen  $MP$  durchlaufen wird:

$$t = \frac{\text{Sect. } MFP}{m\sqrt{FM}}.$$

Da aber die Geschwindigkeiten gleich den Bogen, getheilt durch die Zeit sind, so wird, wenn wir sie bez. mit  $C$  und  $K$  bezeichnen:

$$C = \frac{MN}{T} = \frac{MN \cdot m \sqrt{2AF}}{\text{Sect. } (MFN)}$$

$$K = \frac{MP}{t} = \frac{MP \cdot m \sqrt{FM}}{\text{Sect. } (MFP)},$$

also:

$$C:K = \frac{MN \cdot \sqrt{2AF}}{\text{Sect. } (MFN)} : \frac{MP \cdot \sqrt{FM}}{\text{Sect. } (MFP)}.$$

Es ist aber (§ 4)

$$AF = MF \sin MNP^2 = MF \cdot \frac{MP^2}{MN^2},$$

[37] also:

$$MN\sqrt{AF} = MP\sqrt{MF}.$$

Da nun der Winkel  $MFP$  unendlich klein ist, so werden die Flächen gleich und daher

$$C:K = \sqrt{2}:1.$$

§ 77. **Zusatz.** Da die Kreisgeschwindigkeit nach § 75 ist

$$K = \frac{2m}{\sqrt{MF}},$$

so wird die parabolische Geschwindigkeit:

$$C = \frac{2m\sqrt{2}}{\sqrt{MF}}.$$

Diese Formel drückt die Strecke aus, welche der Comet in einem Tage in der Richtung der Tangente durchlaufen würde (§ 75), wenn er nicht durch die Anziehung von der geraden Linie abgelenkt würde.

§ 78. **Anmerkung.** Von dieser Eigenschaft der parabolischen Bewegung kann man Gebrauch machen, wenn man die Länge des in einem kleinen Zeitintervall durchlaufenen Bogens genähert anzugeben hat; dieselbe kann auch mit entsprechender Beschränkung auf elliptische Bahnen ausgedehnt werden. Die schöne Einfachheit des Satzes rührt daher, dass die parabolische Geschwindigkeit ausschliesslich von der heliocentrischen Entfernung des Cometen abhängt und dieselbe bleibt, welches auch der Parameter der Parabel sei. Da aber die Geschwindigkeit sich von Moment zu Moment ändert, so ist der Nutzen des übrigens längst bekannten Satzes ein geringer.

[38] § 79. Aufgabe 14. (Fig. 5.) Gegeben seien die beiden Radienvectoren  $NF$  und  $MF$  und der Winkel  $NFM$ ; man soll die Zeit finden, in welcher der Comet den parabolischen Bogen  $NM$  beschreibt.

Lösung: Die Fläche des Sectors  $NFM$  ist (§ 29)

$$A = \frac{1}{3} \sqrt{ab} \cdot \sin c (a + b + \sqrt{ab} \cos c).$$

Der Halbparameter ist (§ 28)

$$s = 2AF = \frac{2ab \sin^2 c}{a + b - 2\sqrt{ab} \cos c}.$$

Da nun die gesuchte Zeit durch (§ 75)

$$T = \frac{nA}{\sqrt{s}}$$

gegeben ist, so erhält man durch Substitution:

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (a + b + \sqrt{ab} \cos c) \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab} \cos c}.$$

§ 80. Zusatz 1. Diese Formel giebt entwickelt:

$$18m^3 T^3 = (a + b)^3 - 3(a + b)ab \cos c^2 - 2ab\sqrt{ab} \cos c^3$$

oder.

$$18m^3 T^2 = a^3 + b^3 + 3(a + b)ab \sin^2 c - 2ab\sqrt{ab} \cos c^3,$$

so dass also, wenn die Zeit gegeben ist, jede der Grössen  $a, b, c$  durch eine Gleichung dritten Grades gefunden wird.

[39] § 81. Zusatz 2. Wird  $c = \frac{1}{2} NFM = 90^\circ$  oder  $NFM = 180^\circ$ , also  $\cos c = 0$ , so wird die Formel sehr kurz:

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (a + b)^{\frac{3}{2}}.$$

Dies ist also die Zeit, die ein Comet braucht, um von einem beliebigen Punkte seiner Bahn zum entgegengesetzten auf demselben Durchmesser zu gelangen.

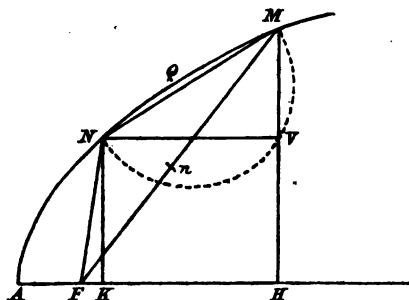


Fig. 5.



§ 82. **Zusatz 3.** Ist also die Zeit bekannt, die der Comet von einem seiner Knoten bis zum andern braucht, so kann damit die Summe der in der Knotenlinie liegenden Radienvectoren  $a + b$  angegeben werden:

$$a + b = \sqrt[3]{18 T^2 m^3}.$$

§ 83. **Aufgabe 15.** (Fig. 5.) Gegeben ist die Summe der Radienvectoren  $NF$  und  $MF$  und die Sehne  $NM$ , welche das Dreieck  $NFM$  begrenzt; man soll die Zeit finden, in welcher der Bogen  $NQM$  durchlaufen wird.

Erste Lösung: Da nach § 30 ist:

$$2AF = s = \frac{k^2 - (a - b)^2}{2(a + b - \sqrt{(a + b)^2 - k^2})}$$

und

$$A = \frac{1}{6} (a + b + \frac{1}{2} \sqrt{(a + b)^2 - k^2}) \sqrt{k^2 - (a - b)^2},$$

so erhält man durch Substitution in die Formel (§ 73)

$$T = \frac{nA}{\sqrt{s}}$$

[40] nach durchgeführten Reduction

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (a + b + \frac{1}{2} \sqrt{(a + b)^2 - k^2}) \sqrt{a + b - \sqrt{(a + b)^2 - k^2}}.$$

Zweite Lösung: Gebraucht man die Formel (§ 31)

$$2AF = (k^2 - (a - b)^2)(a + b + \sqrt{(a + b)^2 - k^2}) \frac{1}{2k^2},$$

so hat man auch:

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \frac{k(a + b + \frac{1}{2} \sqrt{(a + b)^2 - k^2})}{\sqrt{a + b + \sqrt{(a + b)^2 - k^2}}}.$$

Dritte Lösung: Nach § 63 ist

$$\frac{3A}{\sqrt{AF}} = \left( \frac{a + b + k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{a + b - k}{2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Also hat man nach § 73, wonach  $T = \frac{nA}{\sqrt{s}} = \frac{A}{m\sqrt{2AF}}$  ist, auch:

$$T = \frac{1}{m^3 \sqrt{2}} \left( \left( \frac{a+b+k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{a+b-k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

§ 84. **Zusatz 1.** Nennt man die Summe der Radienvectoren  $a+b=g$ , so kann die Formel der ersten Lösung in folgende Gleichung aufgelöst werden:

$$0 = k^6 + 6g^2 k^4 + 9g^4 k^2 - 144 m^2 T^2 g^3 - 432 m^2 T^2 g k^2 + 72 m^2 T^2.$$

[41] § 85. **Zusatz 2.** Aehnlich kann die Formel der dritten Lösung in die Reihe übergeführt werden:

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{1}{4 \cdot 6} \frac{k^3}{g^{\frac{3}{2}}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{k^5}{g^{\frac{7}{2}}} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16} \frac{k^7}{g^{\frac{11}{2}}} - \dots$$

oder wenn die Brüche ausgerechnet werden:

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{1}{24} \frac{k^3}{g^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{128} \frac{k^5}{g^{\frac{7}{2}}} - \frac{3}{1024} \frac{k^7}{g^{\frac{11}{2}}} - \frac{143}{98304} \frac{k^9}{g^{\frac{15}{2}}} - \dots$$

Diese Reihe ist um so convergenter, je kleiner der Winkel  $NFM$  ist. Für grössere Winkel ist die endliche Formel selbst vorzuziehen.

§ 86. **Aufgabe 16.** (Fig. 6.) Gegeben ist die Sehne  $NM$  und der Pfeil  $QG = QE$ ; man soll die Zeit finden, in welcher der Comet den Bogen  $NM$  durchläuft.

Lösung: Da nach § 58

$$A = \left( \frac{2}{3} QG^2 + \frac{1}{8} NM^2 \right) \sqrt{\frac{AF}{QG}}$$

und ferner nach § 73

$$T = \frac{nA}{\sqrt{2AF}},$$

[42] so wird:

$$T = \frac{n \left( \frac{2}{3} QG^2 + \frac{1}{8} NM^2 \right)}{\sqrt{2QG}}.$$

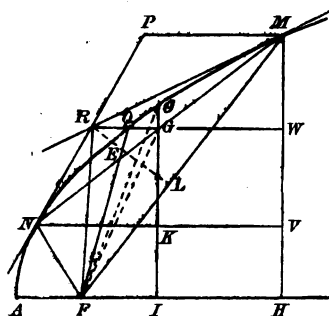


Fig. 6.

§ 87. **Aufgabe 17.** (Fig. 6.) Gegeben ist die Sehne  $NM$  und der Radiusvector  $FQ$ ; man soll die Zeit finden, in der der Comet den Bogen  $NM$  beschreibt.

Lösung: Nach der Formel der vorhergehenden Aufgabe ist

$$T = \frac{n(\frac{2}{3} Q G^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{8} N M^{\frac{1}{2}})}{\sqrt{2} Q G}.$$

Da nun

$$\frac{N M^{\frac{1}{2}}}{16 F Q} = Q G$$

ist, so folgt:

$$T = \frac{n \cdot N M}{\sqrt{2}} \left( \frac{N M^{\frac{1}{2}}}{96 F Q^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{2} \sqrt{F G} \right).$$

§ 88. **Zusatz.** Entwickelt man diese Formel in die Gleichung

$$N M^3 + 48 N M \cdot F Q^2 = 96 \sqrt{2} m \cdot T \cdot F Q^{\frac{3}{2}}$$

und wendet dann die Methode an, die ich im Bande III der »Acta Helvetica« (1758) beschrieben habe, so ergibt sich die Reihe:

$$N M = \sqrt{2} \left( 2 \frac{m T}{F Q^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{3} \frac{m^3 T^3}{F Q^{\frac{7}{2}}} + \frac{1}{5} \frac{m^5 T^5}{F Q^{\frac{9}{2}}} - \frac{1}{7} \frac{m^7 T^7}{F Q^{\frac{11}{2}}} + \dots \right).$$

[43] Wenn man die mittlere Entfernung der Erde = 1 nimmt und für  $m = \frac{1}{n}$  den Werth setzt, den wir oben (§ 73) gefunden haben, nämlich  $n = 116.2648$ , so wird die Reihe, in Zahlen ausgedrückt:

$$\begin{aligned} N M = & 0.024\ 3275 \frac{T}{F Q^{\frac{1}{2}}} - 0.000\ 000\ 299\ 9500 \frac{T^3}{F Q^{\frac{7}{2}}} \\ & + 0.000\ 000\ 000\ 011\ 094\ 87 \frac{T^5}{F Q^{\frac{9}{2}}} + \dots \end{aligned}$$

Die Logarithmen der Coefficienten sind:

des ersten 0.386 0967 — 2

des zweiten 0.477 0488 — 7

des dritten 0.045 1222 — 11

§ 89. **Anmerkung 1.** Diese Reihe scheint ausserordentlich convergent zu sein; sie convergirt um so schneller, je weniger Tage die Zwischenzeit  $T$  beträgt, vorausgesetzt, dass der Radius-vector nicht beträchtlich kleiner als die Einheit ist.

§ 90. **Anmerkung 2.** (Fig. 10.) Unsere Formel wird überdies auch in dem Falle von Nutzen sein können, wo man die Länge der Ordinate  $nm$  zu berechnen hat, wenn die Zeit, in welcher der Bogen  $nQm$  durchlaufen wird, gegeben ist.

§ 91. **Aufgabe 18.** (Fig. 10.) Gegeben ist der Pfeil  $QG$  und der Radiusvector  $FQ$ ; man soll die Zeit finden, in welcher der Comet den Bogen  $NQM$  durchläuft.

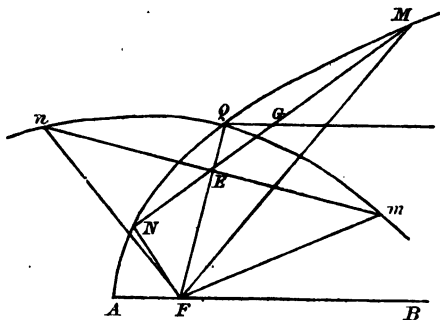


Fig. 10.

[44] **Lösung.** Da (§ 86)

$$T = n \frac{\frac{2}{3} QG^2 + \frac{1}{8} NM^2}{\sqrt{2} QG}$$

und

$$NM^2 = 16 FQ \cdot QG,$$

so folgt:

$$T = n \frac{\frac{2}{3} QG^2 + 2 FQ \cdot QG}{\sqrt{2} QG}.$$

§ 92. **Zusatz.** Hieraus folgt umgekehrt:

$$FQ = \frac{mT}{\sqrt{2} QG} - \frac{1}{2} QG = (§ 40, 42) \frac{a+b}{2} - QG,$$

also:

$$a+b = \frac{2mT}{\sqrt{2} QG} + \frac{1}{2} QG.$$

§ 93. **Lehrsatz 4.** (Fig. 10.) Wird dieselbe Construction ausgeführt wie in Lemma 20 (§ 56), dann sind die Zeiten, in welchen die Bogen  $NQM$  und  $nQm$  durchlaufen werden, einander gleich.

Erster Beweis: Aus der vorhergehenden Aufgabe erhält nämlich, dass die Zeit gegeben ist durch den Radiusvector  $FQ$  und den Pfeil  $QG$ . Nun sind aber in beiden Parabeln nach

dem citirten Satze (§ 56) die Radienvectoren und die Pfeile  $QG = QE$  einander gleich. Also sind es auch die Zeiten, in denen die Bogen  $NM$  und  $nm$  durchlaufen werden.

[45] Zweiter Beweis: Da die Zeiten sich wie die Flächen dividirt durch die Quadratwurzeln aus den Halbparametern verhalten (§ 69), so verhalten sie sich also wie

$$\frac{\text{Sect. } (NFM)}{\sqrt{2AF}} \text{ zu } \frac{\text{Sect. } (nFm)}{\sqrt{2FQ}}.$$

Da nun nach § 56

$$\frac{\text{Sect. } (NFM)}{\sqrt{2AF}} = \frac{\text{Sect. } (nFm)}{\sqrt{2FQ}},$$

so sind auch die Zeiten gleich.

§ 94. **Zusatz.** Da die Zeit gegeben ist durch die Summe der Radienvectoren  $Fn + Fm$  bez.  $FN + FM$  und durch die Sehne  $nm$  bez.  $NM$ , im vorliegenden Falle aber  $nm = NM$  (§ 56) und die Zeiten gleich, so ist umgekehrt klar, dass auch  $nF + mF = NF + MF$  oder die Summe der Radienvectoren gleich sein muss.

§ 95. **Anmerkung.** Diese hervorragende Eigenschaft der parabolischen Bewegung der Cometen kann auch mit entsprechender Begrenzung auf die anderen Kegelschnitte ausgedehnt werden. Uebrigens ist auch hier dasselbe zu bemerken, was wir schon zum Lemma 20 (§ 56) bemerkt haben, nämlich dass wir, wenn der Brennpunkt  $F$  festgehalten wird, statt der Parabel  $NM$  eine beliebige andere nehmen können, die durch  $Q$  hindurchgeht. Und da die Zeit, in welcher die Bewegung des Cometen durch den beliebigen Bogen  $NQM$  ausgeführt wird, einzig und allein abhängt von der Länge der Sehne  $NM$  und von der Summe der Seiten  $NF + MF$ , so ist damit ganz allgemein der Isochronismus der Cometenbewegung dargethan und die Geschwindigkeit ist, wenn sie auch selber unbekannt [46] ist, in derselben Distanz von der Sonne in allen Parabeln dieselbe. Nunmehr wollen wir untersuchen, was hieraus folgt.

§ 96. **Lehrsatz 5.** (Fig. 10.) Wenn die Summe der Radienvectoren  $FN + FM$  und die Sehne  $NM$  gegeben sind, dann wird die Zeit, in welcher der Bogen  $NQM$ , der die Sehne spannt, durchlaufen wird, stets völlig dieselbe sein, von welcher Parabel wir auch Gebrauch machen, wofern nur die Summe der Seiten  $FN + FM$  grösser als der Halbparameter ist.

**Beweis:** Der erste Theil des Satzes folgt daraus, dass die Zeit nur von der Sehne  $NM$  und der Summe der Seiten  $FN + FM$  abhängt. Wenn aber irgend welche Parabel angenommen wird und dieselbe durch den Punkt  $Q$  gehen muss, so ist klar, dass der grösste Halbparameter nur  $2FQ$  sein kann. Nun ist aber (§ 94)  $FN + FM = Fn + Fm$  und  $Fm = Fn = FQ + QE$  und daher  $Fn > FQ$  und mithin  $FN + FM > 2FQ$ .

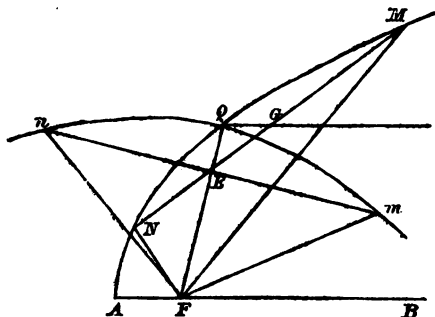


Fig. 10.

**§ 97. Anmerkung.** Man muss also eine solche Parabel auswählen, dass ihr Halbparameter kleiner als  $2FQ$  wird. Wenn daher eine Scala zu construiren ist, die für beliebige Parabeln dienen kann, so wird sich diejenige am meisten empfehlen, deren Parameter gleich 0 ist, oder was dasselbe ist, die gerade Linie, die vom Centrum der Sonne ins Unendliche gezogen wird. Wenn nun auch kaum ein Comet sich in einer derartigen geradlinigen Parabel bewegt, so kann sie doch mit Nutzen verwendet werden und gewiss als Maass dienen, um die Bewegung der Cometen in beliebigen anderen Parabeln zu [47] definiren. Da diese Parabel mit einer Geraden identisch ist, so scheint der Comet, der in ihr sich zu bewegen supponirt wird, gleichsam auf die Sonne zu zu fallen. Es ergibt sich so ganz natürlich folgende

**§ 98. Definition 1.** Unter »lapsus parabolicus« eines Cometen in Bezug auf die Sonne versteht man die Bewegung desselben auf einer Parabel, deren Parameter gleich Null ist, oder deren Scheitel mit dem Brennpunkte im Centrum der Sonne zusammenfällt.

**§ 99. Zusatz 1.** Da die Parabel ins Unendliche ausläuft, so beginnt der »lapsus parabolicus« mit Null; in irgend einer bestimmten Entfernung von der Sonne aber ist er das wohldefinite Maass der Geschwindigkeit.

**§ 100. Zusatz 2.** Da die Geschwindigkeit des Cometen in der Parabel nur von seiner Entfernung von der Sonne

abhängt (§ 78), so wird sie, wenn diese mit  $MF$  bezeichnet wird, sein (§ 77):

$$C = \frac{2m\sqrt{2}}{\sqrt{MF}}.$$

§ 101. **Zusatz 3.** Da ferner der lapsus parabolicus im Anfang Null ist (§ 99), so ist es bequemer, die Zeiten vom Centrum der Sonne nach rückwärts zu zählen, indem man an Stelle des Falles den parabolischen Aufstieg nimmt.

[48] § 102. **Aufgabe 19.** (Fig. 13.) *Man soll die Intervalle der Zeiten im lapsus parabolicus definiren, oder die Zeit, in welcher der Comet von einer gegebenen Entfernung bis zu einer bestimmten anderen gelangt.*

Lösung: Sei  $F$  das Centrum der Sonne,  $FM$  die eine Distanz,  $FN$  die andere, so ist nach der Zeit gefragt, in

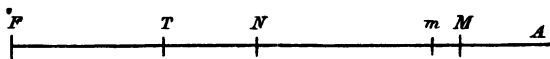


Fig. 13.

welcher der Comet die Strecke  $MN$  zurücklegt. Wir betrachten  $FM$  und  $FN$  als Radienvectoren,  $MN$  als die Sehne des zu durchlaufenden Bogens, welcher in unserem Falle keine Krümmung hat, dann wird sein (§ 83)

$$T = \frac{1}{3m\sqrt{2}} \left( \left( \frac{FN + FM + MN}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{FN + FM - MN}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right).$$

Nun ist im vorliegenden Falle:

$$MN = FM - FN,$$

also:

$$\frac{FN + FM + MN}{2} = FM$$

$$\frac{FN + FM - MN}{2} = FN$$

und daher die gesuchte Zeit:

$$T = \frac{1}{3m\sqrt{2}} (FM^{\frac{3}{2}} - FN^{\frac{3}{2}}).$$

[49] § 103. **Zusatz 1.** Die Zeit, in welcher der Comet von  $M$  bis zum Centrum gelangt, wird also erhalten, indem man  $FN = 0$  setzt, nämlich:

$$T = \frac{1}{3m\sqrt{2}} FM^{\frac{3}{2}}.$$

§ 104. **Zusatz 2.** Hieraus folgt umgekehrt:

$$FM = \left( \frac{18 T^2}{n^3} \right)^{\frac{1}{3}},$$

oder wenn wir für  $n$  den Werth substituiren, der der mittleren Entfernung 1 der Erde von der Sonne entspricht (§ 73)

$$\log FM = \frac{2}{3} \log T - 0.9585412.$$

Durch diese Formel wird also in bestimmten Zahlen die Distanz  $FM$  durch die Zeit des lapsus parabolicus definirt und umgekehrt.

§ 105. **Anmerkung.** Wenn man in die Formel des ersten Zusatzes für  $FM$  der Reihe nach die mittleren Entfernungen der Planeten substituirt, so findet man die Zahl der Tage, in welchen der parabolische Fall des Cometen in die Sonne ausgeführt wird, nämlich

vom	☿	aus in	807.50	Tagen
»	♂	» »	325.00	»
»	♂	» »	51.54	»
»	♂	» »	27.40	»
»	♀	» »	16.85	»
»	♂	» »	6.60	»

Genauer ist der »lapsus parabolicus« für die Längeneinheit = mittlere Entfernung der Erde:

$$27^d 9^h 41^m 34^s.$$

[50] § 106. **Zusatz.** Da der besprochene Fall schneller ist als in jeder beliebigen elliptischen, parabolischen oder kreisförmigen Bewegung, so geben die obigen Zahlen die halbe Dauer der kürzesten Zeit, welche ein Comet innerhalb einer Planetenbahn zubringen kann. Die kürzeste Dauer selbst wird für die



$\odot$ -Bahn	1615.00	Tage
$\text{♂}$ -	650.00	,
$\text{♂}$ -	103.08	,
$\text{♂}$ -	54.80	,
$\text{♀}$ -	33.70	,
$\text{♂}$ -	13.20	,

Wenn ein hyperbolischer Fall angenommen würde, so würde diese Dauer eine kürzere sein, wie man durch leichte Ueberlegung findet. Da aber der parabolische Fall die Grenze des elliptischen ist, so haben wir doch lieber den parabolischen den kürzesten genannt. Es erhellt übrigens hieraus, dass die Cometen, welche sich unserer Betrachtung darbieten, fast volle fünf Jahre innerhalb der Bahn des Saturn verweilen, wenn wir sie auch kaum ebensoviele Monate sehen können.

§ 107. **Definition 2.** Unter Scala der parabolischen Geschwindigkeiten wollen wir die Darstellung der Geschwindigkeiten eines in einer Parabel sich bewegenden Cometen für jede beliebige Entfernung von der Sonne verstehen.

§ 108. **Lehrsatz 6.** (Fig. 13.) Wenn  $F$  das Centrum der Sonne bedeutet und es wird zu jedem beliebigen Punkte  $M$  die Zahl der Tage geschrieben, in welchen der parabolische Fall von [51]  $M$  nach  $F$  ausgeführt wird, so ist die auf diese Weise getheilte Gerade  $FM$  die Scala der parabolischen Geschwindigkeiten.

Beweis: Es stellt nämlich eine beliebig kleine Abscisse  $Mm$  die Strecke des Falles dar. Wenn nun die Zeiten beigeschrieben sind, so wird auch der Zeitraum gegeben sein, in

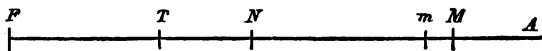


Fig. 13.

welchem der Fall durch  $Mm$  ausgeführt wird. Wenn man aber die Strecke  $Mm$  durch diesen Zeitraum dividirt, so hat man die Geschwindigkeit. Es stellt also  $FM$  die Geschwindigkeiten des parabolischen Falles dar. Da nun die Geschwindigkeit eines in einer beliebigen Parabel sich bewegenden Cometen für dieselbe Distanz von der Sonne constant ist (§ 78), so folgt, dass die Scala  $FM$  ganz allgemein die Geschwindigkeit der parabolischen Bewegung darstellt.

§ 109. **Anmerkung.** Man kann auch noch andere Methoden dieser Art geben, um die Scala zu construiren, die hier beschriebene ist aber für unseren Zweck die angemessenste.

§ 110. **Aufgabe 20.** (Fig. 13.) *Man soll die Scala der parabolischen Geschwindigkeiten construiren.*

**Lösung.** Setzt man die mittlere Entfernung der Erde von der Sonne  $FT = 1$ , so kann nach der Formel (§ 104)

$$\log FM = \frac{2}{3} \log T - 0.9585412$$

[52] für jede Anzahl von Tagen  $T$  die entsprechende Distanz  $FM$  berechnet werden; dieselbe wird aus  $F$  auf der Geraden  $FM$  aufgetragen und zu  $M$  die zugehörige Zahl der Tage hinzugeschrieben; dann ist die Scala construirt.

§ 111. **Anmerkung.** (Fig. 14.) Beistehende Figur stellt eine Scala dar, ausgedehnt bis auf 100 Tage.  $F$  ist das Centrum der Sonne,  $FT$  die mittlere Entfernung der Erde von

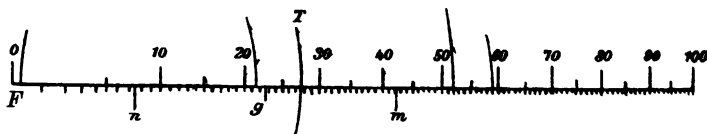


Fig. 14.

der Sonne; der Punkt  $T$  muss also auf  $27^d 9^h 41^m 34^s$  fallen (§ 105). In einem grösseren Massstab angelegt, werden die Theile leichter zu unterscheiden sein. Es ist selbstverständlich, dass man bei Construction einer Cometenbahn denselben Massstab, d. h. dieselbe Strecke für die Entfernung  $FT$  wählen muss, wie in der Scala. Hieran brauche ich also in Zukunft nicht mehr zu erinnern.

§ 112. **Aufgabe 21.** (Fig. 14, 15.) *Wenn eine Cometenbahn, in demselben Massstabe wie die Scala, gezeichnet vorliegt, so soll man die Zeit angeben, in welcher ein beliebiger gegebener Bogen derselben durchlaufen wird.*

**Lösung:** L. Sei  $AM$  die Parabel,  $F$  ihr Brennpunkt,  $FT$  die astronomische Einheit; gefragt wird, in welcher Zeit der Bogen  $MN$  durchlaufen wird. Man trage  $FN$  in  $F'$  auf, halbiere  $FM$  in  $g$ , dann wird  $Fg = \frac{1}{2}(FN + FM)$ . Ebenso halbiert man die Sehne  $NM$  in  $G$ . Dann trägt man  $Fg$  auf der Scala von  $F$  aus auf, wo es in 22.6 einschneidet. Ferner



**Beweis:** Wenn nämlich die Summe der Radienvectoren und die Sehne des durchlaufenen Bogens dieselben sind, so ist die Zeit dieselbe, von welcher Parabel man auch Gebrauch mache (§ 96); wenn daher die halbe Summe in  $Fg$  aufgetragen und die halbe Sehne von  $g$  aus nach  $m$  und  $n$ , so ist  $mn$  die Länge der Sehne. Da aber in der Scala die Zeiten ein- [54] geschrieben sind, in denen der Comet die Strecke  $mn$  durchläuft, so ist klar, dass damit auch die Zeit gegeben ist, in der  $MN$  zurückgelegt wird.

§ 113. **Anmerkung 1.** Aus der Formel (§ 104, 110)

$$\log FM = \frac{2}{3} \log T - 0.958\,5412$$

oder

$$FM = \left( \frac{18\,T^{\frac{2}{3}}}{n^2} \right)^{\frac{1}{3}}$$

erhält, dass das Quadrat der Zeit, in welcher ein Comet von einem gegebenen Punkte  $g$  in parabolischer Bewegung zur Sonne  $F$  gelangt, sich verhält wie der Cubus der Distanz  $Fg$ . Die Folge davon ist, dass in der Scala der parabolischen Geschwindigkeiten in der vierfachen Entfernung von der Sonne die Zeiten 8mal grösser sind. Ueberhaupt ist der Cubus des Vierfachen gleich dem Quadrate des Achtfachen. Wenn man daher in die Scala auch nur die ganzen Tage einschreibt, so können doch Bruchtheile derselben abgelesen werden, etwa Intervalle von drei Stunden oder halben Tagesquadranten. Es ist nämlich dem vierten Theile der Distanz der achte Theil der Zeit beizuschreiben.

§ 114. **Anmerkung 2.** Um in der Anwendung die Halbierung der Sehne  $NM$  und der Strecke  $\nu M$  sich zu ersparen, ist es gerathen, die Scala im doppelten Massstab zu construiren. Dann hat man die ganze Summe der Radienvectoren  $FM$  und  $FN$  und die ganze Sehne auf die beschriebene Weise auf der Scala abzutragen und es leuchtet ohne Weiteres ein, dass man dadurch die doppelte Genauigkeit der Ablesung erhält.

[55] § 115. **Anmerkung 3.** Um die Zeichnung der Scala kürzer und leichter bewerkstelligen zu können, kann man eine Tafel berechnen, die das Verhältniss zwischen der Zeit und dem »lapsus parabolicus« enthält. (§ 110.) Diese Tafel wird auch von Nutzen sein, wenn man die Aufgabe durch Rechnung lösen will. Wir haben des häufigen Gebrauches halber eine

solche Tafel am Schlusse des Buches angehängt. Uebrigens gilt von der Tafel dieselbe Bemerkung wie von der Scala (§ 113), wenn man Bruchtheile der Zeit zu erhalten wünscht.

§ 116. **Anmerkung 4.** Aus Vorstehendem erhellt, dass der Gebrauch der Scala leicht und bequem ist, wenn man aus der Summe der Radienvectoren und aus der Sehne die Zeit ermitteln will, in der der Bogen durchlaufen wird. Wenn man aber die Aufgabe umkehrt und aus der Summe der Radienvectoren und der Zeit die Sehne, oder aus der Sehne und der Zeit die Summe der Radienvectoren oder, was am häufigsten vorkommt, aus einem der beiden Radien, der Zeit und dem Halbparameter der Parabel den anderen Radius und die Sehne ermitteln will, so kann diese nur durch Versuche gelöst werden. Damit also der Gebrauch der Scala bei Ermittlung einer Cometenbahn sich leichter gestalte, ergibt sich aus dem Problem selbst, dass man die Frage umkehren, d. h. die Zeit aus der Summe der Radienvectoren und der Sehne suchen müsse. Diese muss dann mit der thatsächlich beobachteten übereinstimmen.

[56] § 117. **Lehrsatz 7.** (Fig. 15.) *Wenn die Sehne  $MM'$  durch den Brennpunkt geht, dann hängt die Zeit, in welcher der Bogen  $MA M'$ , den die Sehne spannt, durchlaufen wird, einzig und allein von der Länge der Sehne ab und daher ist die Lage des Brennpunktes oder seiner Entfernung von den Enden der Sehne  $M$  und  $M'$  gleichgültig.*

**Beweis:** In diesem Falle ist nämlich der Winkel  $c = 90^\circ$  und daher (§ 81)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (a + b)^{\frac{3}{2}}.$$

Da aber  $a + b = MM'$ , so folgt

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} \overline{MM'}^{\frac{3}{2}}.$$

§ 118. **Zusatz 1.** Lässt man daher den Brennpunkt mit dem Anfang der Sehne zusammenfallen, so drückt diese Formel ebenfalls die Zeit des parabolischen Falles des Cometen auf die Sonne aus (§ 103).

§ 119. **Zusatz 2.** (Fig. 13.) Hieraus kann nun umgekehrt die Formel (§ 83)

$$mT = \frac{1}{3\sqrt{2}} \left( \left( \frac{FN + FM + NM}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{FN + FM - NM}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right)$$

bewiesen werden. Bewegt sich nämlich der Comet von  $M$  nach  $N$ , so wird die Zeit, welche er braucht, gleich der Differenz der Zeiten, in welchen er von  $M$  und  $N$  zum Centrum [57] der Sonne gelangen würde, daher nach § 118 gleich

$$mT = \frac{1}{3\sqrt{2}} (FM^{\frac{3}{2}} - FN^{\frac{3}{2}}).$$

Nun ist aber

$$FM = \frac{FM + FN + MN}{2}$$

$$FN = \frac{FM + FN - MN}{2},$$

also kommt durch Substitution unsere Formel. Hieraus erhellt, dass dies in der That eine allgemeine Formel ist, weil die Zeit einzig und allein von der Sehne und der Summe der Radienvectoren abhängt.

§ 120. Aufgabe 22. (Fig. 6.)

Ist alles wie in Lemma 12 (§ 38), so finde man die Zeit, in welcher der Bogen  $NQ$  oder  $MQ$  durchlaufen wird, falls die Seiten des Dreiecks  $NFM$  gegeben sind.

Lösung: Da die Sehne  $NM$  in  $G$  halbart ist und  $QG$  der Axe  $AF$  parallel ist, so halbart die Gerade  $QG$  das Segment  $NMQ$  und die Gerade  $FG$  das Dreieck  $FNM$ . Das von Geraden und Curven begrenzte Flächenstück  $NQG$  ist also die Hälfte des Sectors  $NQMF$ . Ziehen wir daher das Dreieck  $NQG$  ab oder addiren dasselbe, so wird

$$\text{Sector } NFQ = \frac{1}{2} NQMF - FQG$$

$$\text{» } MFQ = \frac{1}{2} NQMF + FQG.$$

[58] Nennen wir daher  $t$  und  $\tau$  die Zeiten, so wird (§ 73)

$$t = \frac{1}{2} (NQMF - FQG) : m\sqrt{2AF}$$

$$\tau = \frac{1}{2} (NQMF + FQG) : m\sqrt{2AF}$$

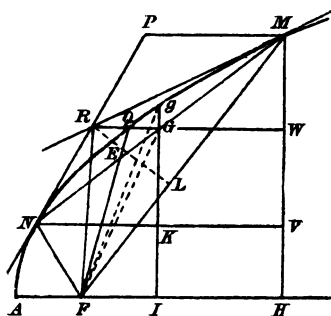


Fig. 6.

oder wenn wir die Zeit, in der der Bogen  $NQM$  durchlaufen wird,  $T$  nennen, so wird:

$$t = \frac{1}{2}T - \frac{FQG}{m\sqrt{2AF}}$$

$$\tau = \frac{1}{2}T + \frac{FQG}{m\sqrt{2AF}}.$$

Nun ist aber die Fläche des Dreiecks

$$\triangle FQG = \frac{1}{2}QG \cdot GI$$

und nach der Gleichung der Parabel ist

$$GI = 2\sqrt{(QF - AF)AF}.$$

Daher

$$\frac{\triangle FQG}{\sqrt{AF}} = QG\sqrt{QF - AF}$$

oder

$$\frac{\triangle FQG}{\sqrt{AF}} = \sqrt{QF} \cdot QG \cdot \sqrt{1 - \frac{AF}{QF}}.$$

Weil aber  $QW$  und  $QV$  der Axe  $AF$  parallel sind, so wird nach § 4 und § 38

$$\sqrt{\frac{AF}{QF}} = \sin MNV = \frac{MV}{NM}$$

und daher

$$\sqrt{1 - \frac{AF}{QF}} = \frac{NV}{NM} = \frac{a - b}{k}.$$

Weiter ist

$$NM^2 = 16 QF \cdot QG$$

oder

$$QG \cdot \sqrt{QF} = \frac{1}{4}NM\sqrt{QG}$$

[59] und daher nach § 45:

$$\frac{\triangle FQG}{\sqrt{AF}} = \frac{a - b}{8} \left( \left( \frac{a + b + k}{2} \right)^{\frac{1}{2}} - \left( \frac{a + b - k}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \right).$$

Wird also der Kürze halber die Summe der Seiten  $a + b = g$  gesetzt, so folgt:

$$6\sqrt{2} \, m t = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - 3\frac{a-b}{4} \left(\left(\frac{g+k}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$6\sqrt{2} \, m \tau = \left(\frac{g+k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{\frac{3}{2}} + 3\frac{a-b}{4} \left(\left(\frac{g+k}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{g-k}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\right).$$

§ 121. **Aufgabe 23.** (Fig. 6.) Wenn die Summe der Radienvectoren  $NF + MF = a + b = g$  und zugleich die Zeit  $T$ , in welcher der Bogen  $NM$  durchlaufen wird, gegeben ist, so soll man die Länge der Sehne  $NM = k$  ermitteln.

Lösung: Nach der ersten Lösung von Aufgabe 15 (§ 83) hat man:

$$3\sqrt{2} \, m T = \left(g + \frac{1}{2}\sqrt{g^2 - k^2}\right) \sqrt{g - \sqrt{g^2 - k^2}}.$$

Daraus folgt:

$$6\sqrt{2} \, m T = (2g + \sqrt{g^2 - k^2}) \sqrt{g - \sqrt{g^2 - k^2}}$$

und weiter:

$$72 m^2 T^2 = (5g^2 - k^2 + 4g\sqrt{g^2 - k^2})(g - \sqrt{g^2 - k^2})$$

oder

$$72 m^2 T^2 - g^3 - 3gk^2 = -(g^2 - k^2)^{\frac{3}{2}}.$$

[60] Setzt man nun:

$$g^2 - k^2 = v^2 \quad \text{und} \quad -72 m^2 T^2 + 4g^3 = h,$$

so folgt durch Substitution

$$v^3 + 3gv^2 = h.$$

Wird diese Gleichung aufgelöst, so erhält man  $v$  und dann  $k$ . Wendet man die oben (§ 88) citirte Methode an, so geht diese Gleichung in die eine oder die andere der folgenden Reihenentwickelungen über:

$$v^2 = g^2 - k^2 = \frac{h}{3g} - \frac{h^{\frac{3}{2}}}{(3g)^{\frac{5}{2}}} + \frac{3}{2} \left( \frac{h^2}{(3g)^4} - \frac{7}{4} \frac{h^{\frac{5}{2}}}{(3g)^{\frac{7}{2}}} + \frac{8 \cdot 10}{4 \cdot 6} \frac{h^3}{(3g)^7} \right. \\ \left. - \frac{9 \cdot 11 \cdot 13}{4 \cdot 6 \cdot 8} \frac{h^{\frac{7}{2}}}{(3g)^{\frac{17}{2}}} + \frac{10 \cdot 12 \cdot 14 \cdot 16}{4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \frac{h^4}{(3g)^{10}} - \dots \right)$$

oder:



$$\begin{aligned}
 v^3 = (g^2 - k^2)^{\frac{3}{2}} &= h - 3g h^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \left( (3g)^2 h^{\frac{1}{3}} - \frac{3}{6} (3g)^3 + \frac{5 \cdot 2}{6 \cdot 9} \frac{(3g)^4}{h^{\frac{1}{3}}} \right. \\
 &\quad - \frac{7 \cdot 4 \cdot 1}{6 \cdot 9 \cdot 12} \frac{(3g)^5}{h^{\frac{2}{3}}} + * + \frac{11 \cdot 8 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18} \frac{(3g)^7}{h^{\frac{4}{3}}} \\
 &\quad \left. - \frac{13 \cdot 10 \cdot 7 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2}{6 \cdot 9 \cdot 12 \cdot 15 \cdot 18 \cdot 21} \frac{(3g)^8}{h^{\frac{5}{3}}} + \dots \right).
 \end{aligned}$$

Die eine oder die andere dieser Reihen ist immer mehr oder weniger convergent, aber niemals beide zugleich.

[61] § 122. **Zusatz 1.** Da

$$v^2 = g^2 - k^2 \quad \text{und} \quad g = a + b,$$

so folgt:

$$v^2 = a^2 + b^2 - k^2 + 2ab.$$

Nun ist durch Trigonometrie

$$a^2 + b^2 - k^2 = 2ab \cos 2c.$$

Also:

$$v^2 = 2ab(1 + \cos 2c) = 4ab \cos^2 c.$$

Nach § 48 wird somit

$$v = 3\sqrt{ab} \cos c = 2FE.$$

§ 123. **Zusatz 2.** Da also

$$v = 2FE$$

und

$$g = a + b = 2\overline{Fg} \quad (\S 40),$$

so wird

$$k^2 = g^2 - v^2 = 4(\overline{Fg}^2 - FE^2).$$

§ 124. **Zusatz 3.** Ferner wird jetzt:

$$2FE^3 + 6Fg \cdot FE^2 = 8Fg^3 - 18m^2 T^2$$

oder

$$2ab\sqrt{ab} \cos^3 c + 3(a+b)ab \cos c^2 = (a+b)^3 - 18m^2 T^2$$

ganz wie oben (§ 80).

§ 125. **Anmerkung.** Eine andere Reihe, durch welche direct  $k$  durch die Summe der Seiten  $a + b = g$  ausgedrückt [62] wird, kann man aus jener ableiten, die wir oben gefunden

haben (§ 85), wenn man sie entsprechend umkehrt. Es ist in der That:

$$4mT = k\sqrt{g} - \frac{1}{24} \frac{k^3}{g^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{128} \frac{k^5}{g^{\frac{5}{2}}} - \frac{3}{1024} \frac{k^7}{g^{\frac{7}{2}}} - \dots$$

Theilt man durch  $g\sqrt{g}$  und setzt  $\frac{4mT}{g\sqrt{g}} = z$ , so wird

$$z = \frac{k}{g} - \frac{1}{24} \left(\frac{k}{g}\right)^3 - \frac{1}{128} \left(\frac{k}{g}\right)^5 - \frac{3}{1024} \left(\frac{k}{g}\right)^7 - \dots$$

Setzt man nun

$$\frac{k}{g} = z + \alpha z^3 + \beta z^5 + \gamma z^7 + \dots$$

so wird:

$$\begin{aligned} \frac{1}{24} \left(\frac{k}{g}\right)^3 &= \frac{1}{24} z^3 + \frac{1}{8} \alpha z^5 + \frac{1}{8} \alpha^3 z^7 + \frac{1}{8} \gamma z^9 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{8} \beta z^7 + \frac{1}{4} \alpha \beta z^9 + \dots \\ &\quad + \frac{1}{24} \alpha^3 z^9 + \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{128} \left(\frac{k}{g}\right)^5 &= \frac{1}{128} z^5 + \frac{5}{128} \alpha z^7 + \frac{5}{64} \alpha^3 z^9 + \dots \\ &\quad + \frac{5}{128} \beta z^9 + \dots \end{aligned}$$

$$\frac{3}{1024} \left(\frac{k}{g}\right)^7 = \frac{3}{1024} z^7 + \frac{21}{1024} \alpha z^9 + \dots$$

$$\frac{143}{98308} \left(\frac{k}{g}\right)^9 = \frac{143}{98308} z^9 + \dots$$

[63] Also folgt:

$$\alpha = \frac{1}{24}$$

$$\beta = \frac{1}{8} \alpha + \frac{1}{128} = \frac{1}{192} + \frac{1}{128} = \frac{5}{384}$$

$$\gamma = \frac{1}{8} \alpha^3 + \frac{1}{8} \beta + \frac{5}{128} \alpha + \frac{3}{1024} = \frac{59}{9216}$$

. . . . .



und die Ordinate  $NK = y$ , dann wird die Fläche des Sectors  $AFN$

$$A = \frac{y^3 + 3s^2y}{12s}.$$

Nennt man also die Zeit  $T$ , so wird (§ 73)

$$T = \frac{A}{m\sqrt{s}} = \frac{y^3 + 3s^2y}{12ms^{\frac{3}{2}}}.$$

§ 128. **Zusatz 1.** Hieraus folgt:

$$y^3 + 3s^2y = 12ms^{\frac{3}{2}}T.$$

Diese Gleichung kann, wenn der Kürze halber

$$12ms^{\frac{3}{2}}T = q$$

[65] gesetzt wird, in folgende Reihe entwickelt werden:

$$y = \frac{1}{3} \frac{q}{s^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{3^4} \frac{q^3}{s^{\frac{9}{2}}} + \frac{3}{3^7} \frac{q^5}{s^{\frac{15}{2}}} - \frac{3 \cdot 8}{2 \cdot 3^{10}} \frac{q^7}{s^{\frac{21}{2}}} + \\ + \frac{3 \cdot 11 \cdot 10}{2 \cdot 3 \cdot 3^{13}} \frac{q^9}{s^{\frac{27}{2}}} - \frac{3 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 3^{16}} \frac{q^{11}}{s^{\frac{33}{2}}} + \dots$$

§ 129. **Zusatz 2.** Aehnlich wird nach der *Cardanischen* Formel:

$$\frac{y}{\sqrt{s}} = \sqrt[3]{6mT + \sqrt{36m^2T^2 + s^3}} + \sqrt[3]{6mT - \sqrt{36m^2T^2 + s^3}}.$$

§ 130. **Zusatz 3.** Da  $AK = \frac{y^2}{2s}$ ,  $NF = \frac{y^2}{2s} + \frac{s}{2}$  ist, so wird, wenn die Ordinate  $y$  gegeben ist, auch leicht die Abscisse  $AK$  gefunden und damit der Radiusvector oder die heliocentrische Distanz  $FN$  und hieraus dann weiter der Winkel  $NFH$ , da

$$\sin NFH = KN : FN.$$

§ 131. **Aufgabe 26.** (Fig. 1.) Gegeben ist die Periheldistanz  $AF$  und der Radiusvector  $FN$ ; man soll die seit dem Periheldurchgang verflossene Zeit finden.

Lösung: Da allgemein (§ 79)

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (a + b + \sqrt{ab} \cos c) \sqrt{a + b - 2\sqrt{ab} \cos c},$$

[66] so wird in unserem Falle:

$$a = FN, \quad b = AF, \quad \sqrt{ab} = FS, \quad c = AFS$$

und

$$\sqrt{ab} \cos c = AF,$$

also:

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (FN + 2AF) \sqrt{FN - AF}.$$

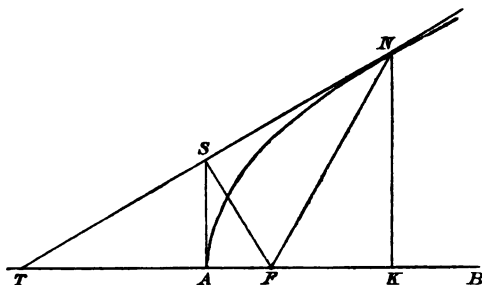


Fig. 1.

§ 132. **Zusatz 1.** Hiernach wird also wiederum:

$$18m^2 T^2 = FN^3 + 3FN^2 \cdot AF - 4AF^3$$

oder

$$FN^3 + 3AF \cdot FN^2 = 18m^2 T^2 + 4AF^3.$$

§ 133. **Zusatz 2.** Da nach der Natur der Parabel

$$FN = AF + AK$$

so folgt durch Substitution:

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}} (AK + 3AF) \sqrt{AK}$$

und daher:

$$AK^3 + 6AK^2 \cdot AF + 9AK \cdot AF^2 = 18m^2 T^2.$$

§ 134. **Aufgabe 27.** (Fig. 1.) Gegeben ist die Perihel-distanz  $AF$  und der Winkel  $NFA$ ; man soll die Perihelzeit finden.

[67] Lösung: Wird  $AF = f$ , Winkel  $AFS = SFN = c$  genannt, so wird (§ 2)

$$AS = f \tan c = \frac{1}{2} NK = \frac{1}{2} y;$$

also:

$$y = 2f \operatorname{tang} c$$

oder, wenn der Halbparameter  $s$  ist

$$y = s \operatorname{tang} c.$$

Nun ist aber (§ 127)

$$T = \frac{y^3 + 3s^2 y}{12ms^{\frac{3}{2}}},$$

also folgt durch Substitution:

$$T = \frac{s\sqrt{s}}{12m} (\operatorname{tang}^3 c + 3 \operatorname{tang} c).$$

§ 135. **Zusatz.** Hieraus folgt nach der *Cardanischen* Formel:

$$\operatorname{tang} c \cdot \sqrt{s} = \sqrt[3]{6mT + \sqrt{36m^2 T^2 + s^3}} + \sqrt[3]{6mT - \sqrt{36m^2 T^2 + s^3}}.$$

§ 136. **Aufgabe 28.**  
(Fig. 12.) Man gebe die-  
jenige Periheldistanz oder  
denjenigen Halbparameter  
an, bei welchem der Comet  
am längsten innerhalb der  
Bahn eines gegebenen Pla-  
neten verweilt.

Lösung: Sei  $F$  das  
Centrum der Sonne,  $AM$   
die Bahn des Cometen,  $A$   
dessen Perihel,  $MP$  die Bahn  
des Planeten, so wird die  
[68] Zeit, innerhalb welcher der Bogen  $MA$  durchlaufen wird,  
die halbe Aufenthaltsdauer innerhalb der Bahn  $MP$  darstellen.  
Es wird also sein (§ 132)

$$18m^2 T^2 = FM^3 + 3FM^2 \cdot AF - 4AF^3.$$

Durch Differenziren erhält man:

$$0 = 36m^2 T dT = 3FM^2 dAF + 12AF^2 dAF.$$

Es muss also sein

$$4AF^2 = FM^2 \quad \text{oder} \quad FM = 2AF.$$

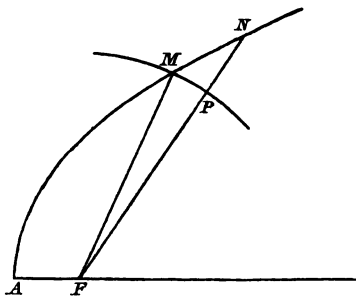


Fig. 12.

Es muss also der Halbparameter der Parabel gleich sein der heliocentrischen Distanz des Planeten, damit der Aufenthalt des Cometen innerhalb der Planetenbahn ein Maximum werde.

§ 137. **Aufgabe 29.** (Fig. 12.) Man soll die Zeit des längsten Aufenthaltes eines in einer Parabel sich bewegendes Cometen innerhalb einer gegebenen Planetenbahn berechnen.

Da

$$18m^2 T^3 = FM^3 + 3FM^2 \cdot AF - 4AF^3$$

und für die Maximaldauer

$$\frac{1}{3}FM = AF$$

ist, so folgt durch Substitution:

$$18m^2 T^3 = FM^3 (1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}) = 2FM^3$$

und daher

$$T = \frac{1}{3}nFM^{\frac{3}{2}}.$$

Dies ist die grösste halbe Dauer und daher die ganze:

$$\frac{2}{3}nFM^{\frac{3}{2}}.$$

§ 138. **Zusatz.** Da die Zeit des kürzesten Aufenthaltes nach § 103, 105 ist:

$$\frac{\sqrt{2}}{3}nFM^{\frac{3}{2}},$$

[69] so erhellt, dass die Maximaldauer zur Minimaldauer sich wie  $\sqrt{2}$  zu 1 verhält.

§ 139. **Anmerkung 1.** Wenn wir für die Distanz  $FM$  die mittleren Entfernungen der Planeten nehmen, so wird die Maximalzeit, die ein in einer Parabel sich bewegendes Comet sich innerhalb der Planetenbahnen aufhalten kann, gefunden zu

Für $\odot$	2282.66 Tage
» $\text{♂}$	919.28 »
» $\text{♂}$	145.80 »
» $\text{♂}$	77.50 »
» $\text{♀}$	47.66 »
» $\text{♂}$	18.67 »

§ 140. **Anmerkung 2.** Die Maximal- und Minimaldauer des Aufenthaltes kann mit der Umlaufzeit der Planeten auf folgende Weise verglichen werden. Die Umlaufzeit ist (§ 75)

$$\frac{\pi}{m} FM^{\frac{3}{2}},$$

die kürzeste Dauer  $\frac{\sqrt{2}}{3m} FM^{\frac{3}{2}},$

die längste Dauer  $\frac{2}{3} FM^{\frac{3}{2}}.$

Die Umlaufszeit eines Planeten verhält sich also zur kürzesten Aufenthaltsdauer eines Cometen wie  $3\pi$  zu  $\sqrt{2}$  (rund wie 20 zu 3) und zur längsten wie  $3\pi$  zu 2 (rund wie 33 zu 7).

[70]

### Dritter Theil.

#### Die scheinbare Cometenbewegung.

Verschiedene Methoden, eine parabolische Cometenbahn aus den Beobachtungen zu bestimmen.

§ 141. **Definition 3.** *Unter den Elementen einer Cometenbahn versteht man die Stücke, durch welche sich die Bahn eines Cometen von allen anderen unterscheidet.*

§ 142. **Anmerkung 1.** In zwei Punkten stimmen alle Bahnen überein, nämlich dass sie Kegelschnitte sind und dass ihr Brennpunkt mit dem Mittelpunkte der Sonne zusammenfällt. Dagegen giebt es sechs Stücke, durch welche sich die Bahnen von einander unterscheiden, nämlich:

- 1) Die Distanz der Perihelies von der Sonne.
- 2) Das Verhältniss dieser Distanz zum Halbparameter, oder was auf dasselbe hinauskommt, die Umlaufszeit, wenn die Bahn elliptisch oder kreisförmig ist.
- [71] 3) Die Zeit, zu der der Comet im Perihel oder in einem bestimmten Punkte seiner Bahn sich befindet.
- 4) Die Neigung der Bahn gegen die Ebene der Ekliptik.
- 5) Die Lage der Knotenlinie oder die heliocentrische Länge des aufsteigenden Knotens.
- 6) Die Entfernung der Axe der Bahn von der Knotenlinie oder die heliocentrische Länge des Perihelies.

Durch die beiden ersten Stücke wird die Art des Kegelschnittes und seine Grösse bestimmt, durch das dritte die



Epoche und durch die drei letzten die Lage der Bahn zur Ekliptik. Sind diese Stücke gegeben, so kann jeder Comet von allen anderen unterschieden werden.

§ 143. **Anmerkung 2.** Um diese sechs Stücke zu bestimmen, braucht man drei Beobachtungen oder drei geocentrische Oerter, nämlich drei Längen und drei Breiten, gemessen von der Erde aus. Es steht aber fest, dass der Theil der Bahn, welchen der Comet durchläuft, während er den Erdbewohnern sichtbar ist, sehr klein ist. Daraus folgt, dass das zweite Element, die Umlaufszeit, aus drei nahe benachbarten Beobachtungen kaum bestimmt werden kann. Wenn aber ein schon früher beobachteter Comet wiederkehrt, so wird hierdurch die Umlaufszeit bekannt und damit ist dann auch die grosse Axe der Ellipse genau definirt (§ 72).

§ 144. **Anmerkung 3.** Ferner hat man durch Beobachtungen constatirt, dass die Bahnen der Cometen, wenn sie überhaupt elliptisch sind, sehr langgestreckt sind, so dass jener sehr kleine Theil, welchen sie während ihrer Sichtbarkeit [72] keitsdauer durchlaufen, ohne nennenswerthen Fehler als Theil einer parabolischen Bahn angesehen werden kann. Da nämlich die Umlaufszeit meistens mehrere Jahrhunderte beträgt, so muss das Aphelium ungeheuer weit von der Sonne entfernt sein. Dagegen befinden sich die Perihelien derjenigen Cometen, welche uns sichtbar werden, fast immer innerhalb der Erdbahn, sind also der Sonne sehr nahe. Daraus folgt, dass das Verhältniss zwischen der Periheldistanz und dem Halbparameter sich fast nicht von dem bei der Parabel stattfindenden unterscheidet.

§ 145. **Lehrsatz 8.** (Fig. 15.) *Wenn ein in einer Parabel sich bewegendes Comet in beiden Knoten  $N$  und  $N'$  von der Erde in  $E$  bez.  $E'$  beobachtet wird, so ist hierdurch die Lage und Grösse der Knotenlinie, die Periheldistanz und die Lage der Axe gegeben, dagegen bleibt die Neigung der Bahn unbekannt.*

**Beweis:** Wenn nämlich die Punkte der Ekliptik gegeben sind, in denen der Comet von der Erde aus gesehen dieselbe schneidet, so ist damit die Lage der Geraden  $EN$  und  $E'N'$  bekannt. Da ferner das Zeitintervall gegeben ist, in welchem der Comet von  $N$  nach  $N'$  gelangt, so ist damit die Entfernung der Knotenpunkte oder die Strecke  $NN'$  bekannt; es ist nämlich nach § 117:

$$NN'^{\frac{3}{2}} = 3 \sqrt{2} m T.$$



*der einen Beobachtung im Perihel seiner parabolischen Bahn befunden habe, so ist die ganze Bahn und ihre Lage gegeben.*

Beweis: Wenn man nämlich die geocentrische Distanz für jene Beobachtung, welche zur Zeit des Periheldurchganges angestellt ist, annimmt, so ist hiermit die heliocentrische Distanz, d. h. die Periheldistanz, und die Lage der Axe gegeben. Hierdurch aber ist dann die Bahn und die Winkelentfernung des Cometen vom Perihel für die Zeit der zweiten Beobachtung oder der Punkt  $N$  gegeben. Wenn also die Parabel um die Axe rotirt, so muss der Punkt  $N$  in diejenige Gerade fallen, [74] welche vom zweiten Ort der Erde nach dem zweiten Ort des Cometen gezogen wird und deren Lage bekannt ist. Tritt dies ein, so ist die angenommene geocentrische Distanz die richtige; tritt es nicht ein, so muss man so lange eine andere annehmen, bis sie der Bedingung genügt. Da dies nothwendig irgend einmal geschehen muss, so ist folglich das Problem ein bestimmtes und zwei Beobachtungen genügen zur Bestimmung der Cometenbahn, wenn die eine zur Zeit des Periheldurchganges angestellt ist.

§ 149. **Anmerkung.** (Fig. 6.) Dieser Satz kann auf zwei beliebige Cometenörter  $N$  und  $M$  ausgedehnt werden, wenn der eine oder der andere der Winkel  $RMF$  oder  $RNF$  gegeben ist, unter welchen die Bahn die Radienvectoren  $FM$  und  $FN$  schneidet.

§ 150. **Lehrsatz 10.** *Wenn auf der scheinbaren Himmelskugel durch den Ort der Sonne und durch den geocentrischen Ort des Cometen ein grösster Kreis gezogen wird, so geht dieser auch durch den Ort der Erde und durch den heliocentrischen Ort des Cometen.*

Beweis: Jener grösste Kreis ist nämlich der Schnitt der Himmelssphäre mit einer Ebene, welche durch das Centrum der Sonne, der Erde und des Cometen geht. Daher liegen die Geraden, welche jene Centra verbinden, in dieser Ebene, und schneiden bis zur scheinbaren Sphäre verlängert auf dieser die heliocentrischen Oerter der Erde und des Cometen und die geocentrischen Oerter der Sonne und des Cometen aus, wie unser Satz behauptet.

[75] § 151. **Zusatz.** Da der Comet sich in einer Ebene bewegt, die durch das Centrum der Sonne geht, so liegen aus demselben Grunde die einzelnen heliocentrischen Oerter des Cometen in einem grössten Kreise der Sphäre.

§ 152. **Anmerkung.** (Fig. 7.) Dieser Satz kann von Nutzen sein, wenn man eine brauchbare Formel findet, welche das Verhältniss zwischen den Winkeln  $NFQ$ ,  $QFM$  und den Zeiten, die zum Durchlaufen der Bogen  $NQ$  und  $QM$  gebraucht werden, ausdrückt. Diese Winkel sind nämlich Bogen des Kreises, auf welchen die heliocentrischen Oerter des Cometen liegen, und werden von den Kreisen, die durch die Oerter der Sonne und die geocentrischen Oerter des Cometen gelegt werden, ausgeschnitten.

§ 153. **Aufgabe 30.** (Fig. 8.) Gegeben sind vier Beobachtungen eines Cometen, die in kurzen Zeitintervallen aufeinander folgen; man soll Lage und Grösse der Bahn durch successive Annäherung finden, wenn diese als parabolisch vorausgesetzt wird.

**Lösung:** Weil wegen der kleinen Zwischenzeit der Bogen, welchen der Comet von der ersten bis zur vierten Beobachtung durchläuft, als eine Gerade betrachtet werden kann, die mit gleichmässiger Geschwindigkeit durchlaufen wird, so kann man die vier beobachteten Oerter, projectirt auf die Ekliptik, durch die vier Punkte  $H, I, K, L$  darstellen. Sind weiter  $EH, EI, AK$  und  $AL$  die Geraden, die von den Oertern der Erde nach den Oertern des Cometen gezogen werden, so sind diese durch die geocentrischen Längen des Cometen ihrer Lage nach gegeben. Nun erinnern wir uns [76] an Lemma 18

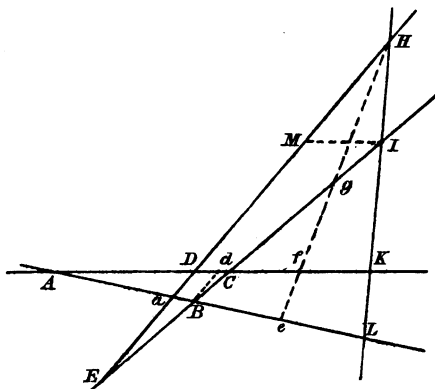


Fig. 8.

(§ 51), wonach eine Gerade  $HL$  so gezogen werden kann, dass sie von den ihrer Lage nach gegebenen Geraden  $EH, EI, AK$  und  $AL$  so geschnitten wird, dass die drei Theile  $LK, KI, IH$  proportional den Zwischenzeiten werden. Ist die Gerade construirt, so behalten wir nur die beiden äussersten Punkte  $H$  und  $L$  bei, errichten in ihnen Senkrechte und erhalten auf diesen mit Hülfe der geocentrischen Breiten zwei Punkte der

Cometenbahn, die nicht viel von den wirklichen abweichen. Nach Lemma 8 (§ 26) ist dadurch die ganze Bahn gegeben. Da aber nach Aufgabe 15 (§ 83) damit gleichzeitig die Zwischenzeit gefunden werden kann, so kann man prüfen, ob sie mit der beobachteten übereinstimmt oder mehr oder weniger abweicht. Tritt letzteres ein, was sogar die Regel sein muss, so suche man mit Hülfe der ermittelten Bahn jene Oerter des

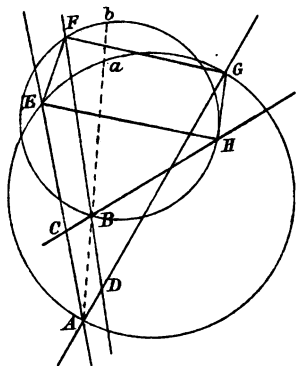


Fig. 9.

Cometen, in welchen er zu den Zeiten der zwischenliegenden Beobachtungen hätte sein müssen, wenn die beobachteten Zeiten mit den berechneten vertauscht werden. (Fig. 9.) Hierdurch wird ein Viereck  $EFGH$  bekannt, welches von dem, das die wahren Cometenörter bilden, viel weniger abweichen wird, wie die zuerst angenommene Gerade. Dieses Viereck muss man auf die Ekliptik projiciren; dann hat man, indem man die Winkel und das Verhältniss der Seiten festhält, ein ähnliches Viereck den vier ihrer

Lage nach gegebenen Geraden  $AE$ ,  $AG$ ,  $BF$ ,  $BH$  einzuschreiben, was mit Hülfe von Lemma 19 (§ 54) gelingt. Behält man dann wiederum nur die beiden äussersten Punkte  $E$  und  $H$  bei, so kann aus ihnen wie oben die Bahn ermittelt werden, die nun von der wahren gewiss weniger abweichen wird. Da man in dieser Weise beliebig lange fortfahren kann, so wird schliesslich die Bahn gefunden, welche der Wahrheit entspricht.

[77] § 154. **Anmerkung.** (Fig. 7.) Von der Hypothese, die wir eben benutzt haben, nämlich, dass der Comet sich auf gerader Linie mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewege, kann auch noch auf andere Weise Gebrauch gemacht werden. Sind  $N$  und  $M$  die beiden äusseren Cometenörter und  $NM$  die Sehne zwischen beiden, so wird vorausgesetzt, dass die Sehne vom Cometen durchlaufen werde und dass er sich zur Zeit, einer zwischenliegenden Beobachtung, wo er sich thatsächlich in dem Punkte  $Q$  der Bahn befunden hat, in dem Punkte  $E$  (Schnitt von  $FQ$  mit  $NM$ ) befinde. Hieraus entspringen zwei Uebelstände. Zuerst nämlich hat der Punkt  $E$  eine andere

geocentrische Länge und Breite, wie der thatsächlich beobachtete Ort  $Q$  des Cometen und dann sind die Zeiten, in welchen die Bogen  $MQ$  und  $QN$  durchlaufen werden, den Abschnitten der Sehne  $ME$  und  $EN$  nicht vollständig proportional. Es erhellt jedoch aus Lemma 17 (§ 49, 50), dass die Verhältnisse zwischen den Flächen der Sektoren  $NFQ$  und  $QFM$  und den Abschnitten  $NE$  und  $EM$  sich sehr wenig voneinander unterscheiden, wenn der Winkel  $NFM$   $20^\circ$  bis  $30^\circ$  nicht überschreitet. Dem zweiten Uebelstand begegnet man also dadurch, dass man zuerst die Abschnitte  $NE$  und  $EM$  als proportional den Zeiten annimmt. Hierdurch wird die Bahn sehr nahe bestimmt und man kann dann das Verhältniss zwischen den Abschnitten  $NE$  und  $EM$  genauer angeben, so dass nun die eigentliche Rechnung beginnen kann. Dem ersten Uebelstand kann man auf verschiedene Weise abhelfen. Man bestimmt nämlich (wie *Euler* gethan hat) aus dem Mittel zwischen den beiden äusseren Distanzen  $NF$  und  $MF$ , das durch Versuch zu ermitteln ist, und aus den Zeiten, in denen die Bogen  $MQ$  und  $QN$  durchlaufen werden, sehr nahe den Pfeil  $QE$  aus dem Fall der Körper gegen die Sonne. Wenn jene Zeiten nahe gleich sind, so wird der grösste Pfeil  $QG = QE$  durch [78] die Formel § 92 gefunden, die als sehr nahe zutreffend angewendet werden kann. Da man nun mit dem Punkte  $E$  insofern viele Mühe hat, als die von ihm nach dem Centrum der Erde gezogene Gerade auf die Ekliptik projicirt werden muss, so wird es dem Vorhaben förderlicher sein, wenn man an Stelle der Ekliptik eine andere Ebene einführt, die der Aufgabe anzupassen ist. Es ist leicht einzusehen, dass zu dem Ende die Projectionen der vom Centrum der Erde nach den Punkten  $Q$  und  $E$  gezogenen Geraden auf jene Ebene zusammenfallen müssen. Dieser Bedingung genügt aber jede Ebene, welche senkrecht zu der Ebene angenommen wird, die durch die zur selben Zeit gehörigen Oerter von Sonne, Erde und Comet gelegt wird. Um dies noch einleuchtender zu machen und zugleich eine Methode der Cometenbahnbestimmung auseinanderzusetzen, behandeln wir die folgende

§ 155. Aufgabe 31. (Fig. 16.) *Gegeben sind drei geocentrische Oerter eines in einer Parabel sich bewegendes Cometen; man soll Lage und Grösse der Bahn ermitteln.*

Lösung: Es seien  $D, C, E$  die senkrechten Projectionen der drei Cometenörter auf die Ebene der Ekliptik. Die Erde befinde sich zu denselben Zeiten in  $A, T, B$ . Nach dem mittleren Ort

$T$  der Erde ziehen wir von der Sonne  $S$  die Gerade  $ST$  und errichten hierauf die Normale  $TR$ . Auf diese fallen wir von den beiden äusseren Oertern der Erde  $A$  und  $B$  die Normalen  $A\alpha$  und  $B\beta$  und ebenso von den Projectionen der Cometenörter  $D, C, E$  die Normalen  $DRH, CQK, EPG$ . Es seien ferner  $RH, QK, PG$  gleich den senkrechten Abständen der Cometenörter von der Ekliptik. Endlich ziehen wir die Geraden  $\alpha H, TK$  und  $\beta G$ .

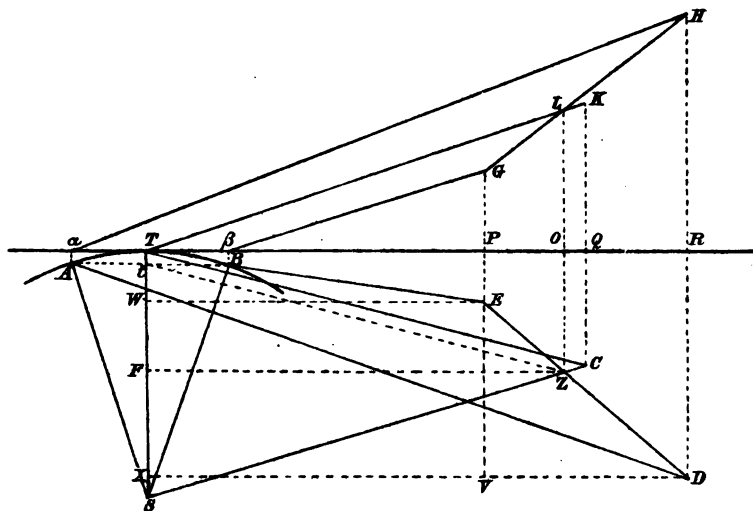


Fig. 16.

[79] Nach dieser Construction kann die Ebene  $\alpha RHG$  als senkrecht zur Ebene der Ekliptik  $\alpha RDS$  und besonders zur Geraden  $TS$  angesehen werden, und sie enthält die orthographische Projection der Oerter der Erde  $\alpha, T, \beta$ , und des Cometen  $H, K, G$ . Es ist nun klar, dass die Gerade  $TK$  nicht nur die Projection der Geraden ist, welche vom mittleren Ort der Erde nach dem Ort des Cometen gezogen wird, der senkrecht über  $C$  steht, sondern auch jener Geraden, die aus dem Centrum der Sonne nach demselben Cometenort gezogen wird und damit der ganzen Ebene, in welcher sich zu derselben Zeit Sonne, Comet und Erde befinden.

Da nun die Geraden  $AD, TC, BE$  durch die geocentrischen Längen des Cometen ihrer Lage nach bekannt sind, ebenso

$TS$  durch die Länge der Sonne oder der Erde zur Zeit der mittleren Beobachtung, und  $AS$  und  $BS$  durch die Längen der Sonne zu den Zeiten der äusseren Beobachtungen, so sind damit erstens gegeben die Strecken

$$\alpha T = AS \sin TSA$$

$$\beta T = BS \sin TSB;$$

zweitens sind die Winkel  $ADR$ ,  $TCQ$  und  $BEP$  die Differenzen zwischen den Längen des Cometen und der Länge der Sonne zur Zeit der mittleren Beobachtung, also ebenfalls bekannt und es wird sein

$$\alpha R = AD \sin ADR$$

$$TQ = TC \sin TCQ$$

$$\beta P = BE \sin BEP.$$

Seien ferner  $\lambda, \lambda', \lambda''$  die geocentrischen Breiten des Cometen in  $A, T, B$ , so wird

$$RH = AD \tan \lambda$$

$$QK = TC \tan \lambda'$$

$$PG = BE \tan \lambda''.$$

Daraus folgt:

$$\tan H\alpha R = \frac{\tan \lambda}{\sin ADR}$$

$$\tan KTQ = \frac{\tan \lambda'}{\sin TCQ}$$

$$\tan G\beta P = \frac{\tan \lambda''}{\sin BEP}.$$

[80] Es sind also in der angenommenen Normalebene jetzt bekannt

die Strecken  $\alpha T, T\beta, \alpha\beta$

und die Winkel  $H\alpha R, KTQ, G\beta P$ ,

die wir wie folgt bezeichnen wollen:

$$\alpha T = g, \quad \beta T = h,$$

$$\sphericalangle H\alpha R = \alpha, \quad \sphericalangle KTQ = \tau, \quad \sphericalangle G\beta P = \beta.$$

Verbindet man die Punkte  $G$  und  $H$ , so ist die Gerade  $GH$  die Projection der Sehne, deren Bogen vom Cometen in dem



Intervall der Zeit zwischen den äusseren Beobachtungen durchlaufen wird. Da  $TK$  die Projection des mittleren Radius-vectors ist, so ist  $LK$  die Projection des Pfeiles und die Zwischenzeiten stehen sehr nahe im Verhältniss:

$$GL : LH = PO : OR = p : q.$$

Wenn es sich nach vollendeter Rechnung lohnt, dieselbe nochmals zu wiederholen, so kann dieses Verhältniss leicht genauer angenommen werden. Macht man nun

$$TO = x, \quad PO = y$$

so wird

$$OR = y \frac{q}{p}$$

und ferner:

$$OL = x \operatorname{tang} \tau$$

$$\alpha R = g + x + y \frac{q}{p}$$

$$\beta P = x - h - y$$

$$HR = \left( g + x + y \frac{q}{p} \right) \operatorname{tang} \alpha$$

$$PG = (x - h - y) \operatorname{tang} \beta.$$

Nun ist aber

$$(OL - GP) : (RH - OL) = p : q,$$

[81] also

$$qx \operatorname{tang} \tau - q(x - h - y) \operatorname{tang} \beta = p \left( g + x + \frac{q}{p} y \right) \operatorname{tg} \alpha - px \operatorname{tang} \tau$$

oder nach gehöriger Reduction:

$$y = \frac{(q+p) \operatorname{tang} \tau - q \operatorname{tang} \beta - p \operatorname{tang} \alpha}{q (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta)} x + \frac{qh \operatorname{tang} \beta - pg \operatorname{tang} \alpha}{q (\operatorname{tang} \alpha - \operatorname{tang} \beta)}.$$

Da diese Formel numerisch zu berechnen ist, setzen wir kurz

$$y = \gamma x + \delta.$$

Es ist also  $y = PO$  durch  $x = TO$  gegeben. — Daraus folgt weiter

$$\beta P = x - \gamma x - \delta - h$$

$$\alpha R = x + \frac{q}{p} \gamma x + \frac{q}{p} \delta + g$$

und daher

$$PE = TW = (x - \gamma x - \delta - h) \cotg BEP + \beta B$$

$$RD = TX = \left(x + \frac{q}{p} \gamma x + \frac{q}{p} \delta + g\right) \cotg ADR + A\alpha.$$

Da aber auch diese Formeln numerisch berechnet werden müssen, so machen wir

$$\frac{TW + TX}{2} = TF = \kappa x + \mu$$

$$TX - TW = WX = \nu x + \varrho = EV$$

$$FS = TS - TF = \varphi x + \omega.$$

[82] Ferner ist

$$WE = TP = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = TR = x + \frac{q}{p} \gamma x + \frac{q}{p} \delta$$

und hieraus:

$$VD = \frac{q + p}{p} (\gamma x + \delta) = \varepsilon x + \eta.$$

Da aber

$$VE = \nu x + \varrho,$$

so folgt

$$ED^2 = (\varepsilon^2 + \nu^2) x^2 + (2\varepsilon\eta + 2\nu\varrho)x + \eta^2 + \varrho^2.$$

Ferner ist:

$$GP = (x - \gamma x - \delta - h) \tan \beta$$

$$RH = \left(x - \frac{q}{p} \gamma x + \frac{q}{p} \delta + g\right) \tan \alpha$$

und daraus kann die Differenz der senkrechten Abstände des Cometen über der Ekliptik zur Zeit der äusseren Beobachtungen, nämlich  $RH - GP$  dargestellt werden durch

$$rx + s.$$

Damit ist nun das Quadrat der Länge der Sehne zu ermitteln, welche der Comēt überspannt:

$$ED^2 + (RH - GP)^2 = Ax^2 + Bx + C.$$

Da

$$WE = x - \gamma x - \delta$$

$$XD = x + \frac{q}{p} \gamma x + \frac{q}{p} \delta,$$

so wird:

$$\frac{WE + XD}{2} = FZ = Dx + E.$$

Hierzu

$$FS = qx + \omega$$

[83] giebt die Hälfte der Summe der äusseren heliocentrischen Distanzen des Cometen zu:

$$V(\varphi x + \omega)^2 + (Dx + E)^2 + LO^2.$$

Aus dieser Grösse, aus der Länge der Sehne und aus der Zeit, die zwischen den äusseren Beobachtungen liegt, kann  $x$  durch die Aufgabe 15 (§ 83) ermittelt werden. Wenn die Sehne klein ist, wird sehr nahe:

$$Ax^2 + Bx + C = \frac{8m^2 T^2}{V(\varphi x + \omega)^2 + (Dx + E)^2 + LO^2},$$

welches eine Gleichung 6. Grades in  $x$  ist.

Ist  $x = TO$  gefunden, so folgt leicht  $y = PO$  und dann  $OR$  und alle Grössen, welche zur Bestimmung der Lage der auf die Ekliptik projecirten Sehne  $ED$  und der Lage der Sehne selbst nothwendig sind. Da die äusseren Radienvectoren

$$b = \sqrt{SW^2 + WE^2 + TG^2}$$

$$a = \sqrt{SX^2 + XD^2 + RH^2}$$

sind, so kann die ganze Bahn durch Lemma 8, 10, 11 und 11, Zusatz 1 bestimmt werden.

**Lösung durch Construction:** Da nun auch durch diese recht weitläufige Rechnung die Bahn des Cometen nur genähert bestimmt wird, so kann man, wenn man diese nicht durchführen will, die ganze Sache auch kürzer und bequemer durch Construction erledigen.

Sei  $S$  der Mittelpunkt der Sonne,  $T$  der Ort der Erde zur Zeit der mittleren Beobachtung,  $B$  und  $A$  die Oerter derselben zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung. Mit Hülfe der bekannten geocentrischen Längen des Cometen ziehe man die [84] Geraden  $TC$ ,  $BE$ ,  $AD$ . Nachdem man dann  $TR$  senkrecht zu  $TS$  gezogen hat, falle man  $A\alpha$  und  $B\beta$  wie in der vorigen Lösung und ähnlich werden entweder durch Rechnung oder durch Construction die Winkel  $G\beta P$ ,  $KTQ$  und  $H\alpha R$  gefunden; endlich wird wie zuvor  $TK$  die Projection der vom

Centrum der Sonne und der Erde nach dem mittleren Cometenort gezogenen Geraden sein.

Nun nehme man auf der Geraden  $TK$  einen beliebigen Punkt  $L$  an, welcher dem Schnittpunkte der Sehne mit dem mittleren Radiusvector entsprechen soll. Wenn dieser Punkt zufällig richtig angenommen worden ist, so wird die wahre Cometenbahn bestimmt sein; im anderen Falle wird die Abweichung bekannt und es wird ein anderer Punkt durch Versuch auszuwählen sein. Die Construction ist für alle Fälle dieselbe; damit also die Figur nicht zu sehr mit Geraden belastet werde, haben wir die wahre Lage des Punktes  $L$  angenommen, ihn aber sonst als noch ungewissen behandelt.

Durch  $L$  werde die Gerade  $GLH$  so geführt, dass die Theile  $GL$  und  $LH$  sich wie die Zwischenzeiten verhalten; sodann werden von  $G$  und  $H$  die Lothe  $GPE$  und  $HRD$  auf die Linie  $\alpha R$  gefällt und bis zum Schnitt mit den früher gezogenen Geraden  $BE$  und  $AD$  verlängert. Damit erhält man  $ED$ , die Projection der Sehne auf die Ekliptik.

Aus dem angenommenen Punkte  $L$  werde ebenfalls das Loth auf  $\alpha R$  gefällt; nennt man  $Z$  den Schnittpunkt mit  $ED$ , so wird sein

$$GL : LH = EZ : ZD.$$

Ist nun der Punkt  $L$  richtig angenommen worden, so müssen die drei Punkte  $S$ ,  $Z$ ,  $C$  in einer und derselben Geraden liegen, welche die Projection des mittleren Radiusvectors auf [85] die Ekliptik ist. Da dies aber noch nicht sicher ist, so verbinde man die Oerter  $A$ ,  $B$  der Erde und ziehe aus dem Schnittpunkte  $t$  mit dem mittleren Radiusvector der Erde die Gerade  $tZ$  nach dem Punkte  $Z$ . Diese Gerade ist von der Beschaffenheit, dass sie für jede beliebige Lage der auf die Ekliptik projecirten Sehne dieselbe in denselben Verhältnisse schneidet, in welchem die Gerade  $EZD$  geschnitten wird, d. h. sehr nahe im Verhältniss der Zwischenzeiten.

Nimmt man daher auf der Geraden  $tT$  beliebige Punkte  $Z$  an, so können leicht ebensoviele Gerade  $EZD$  gezogen werden, die von den Geraden  $AD$ ,  $BE$ ,  $tZ$  in dem gegebenen Verhältnisse der Zwischenzeiten geschnitten werden.

Hat man  $ED$ , so werden mit Heranziehung der geocentrischen Breiten in den Punkten  $E$  und  $D$  Normale errichtet, deren Längen gleich  $GP$  und  $HK$  sind. Die Endpunkte derselben müssen um die Länge der Sehne von einander abstehen

und ihre Verbindungslinien mit der Sonne stellen die äusseren Radienvectoren dar. Mit diesen Distanzen bestimme man nun unter Anwendung der Formeln der Aufgabe 15 (§ 83) oder der Scala der parabolischen Geschwindigkeiten (§ 112 ff.) die Zeit, in welcher der Comet die mit Hilfe des angenommenen Punktes  $Z$  bestimmte Sehne hätte durchlaufen müssen. Wenn diese Zeit mit der zwischen der ersten und dritten Beobachtung liegenden Zeit übereinstimmt, dann war der Punkt  $Z$  richtig angenommen, wenn nicht, so merke man die Differenz und nehme in der Geraden  $tZ$  nacheinander andere Punkte  $Z$  an. Daraus erhält man ebensoviele Differenzen der beobachteten und der durch Construction gefundenen Zeit. Trägt man die Distanzen  $tZ$  als Abscissen und die Differenzen der Zeiten als Ordinaten auf, so kann eine Curve gezogen werden, welche die [86] Gerade  $tZ$  an der Stelle schneiden wird, die dem wahren Punkte  $Z$  entspricht. Selbstverständlich sind die Punkte  $Z$  so anzunehmen, dass die genannten Differenzen sowohl positiv als negativ werden.

Ist nun der richtige Punkt  $Z$  gefunden, so wird die Construction der wahren Projection  $ED$  der Sehne gemacht und damit die Construction der ganzen Bahn sehr leicht zum Abschluss gebracht.

Durch diese Construction kann man aber auch sehr leicht einer Prüfung unterwerfen, ob das Verhältniss zwischen den Theilen  $GL$  und  $LH$  den Zwischenzeiten proportional ist oder merklich davon abweicht. Ist letzteres der Fall, so kann man das Verhältniss genauer bestimmen und dann entweder die Construction oder die Rechnung einschlagen, um Grösse und Lage der Bahn genau zu ermitteln.

§ 156. **Anmerkung 1.** Diese Construction der Bahn wird weitläufig in Folge der Neigung der Bahn gegen die Ekliptik. In Folge dieser nämlich muss man die Abstände des Cometen von den Punkten  $E$  und  $D$  auf doppelte Weise auf die Ebene der Ekliptik übertragen, damit man die Länge der Sehne und der äusseren Radienvectoren bestimmen könne. Uebrigens wird diese Weitläufigkeit, durch die Ersparniss an Arbeit, welche man bei der Berechnung der Zwischenzeit aus der Benutzung der Scala der parabolischen Geschwindigkeiten ziehen kann, zum grossen Theil compensirt.

§ 157. **Anmerkung 2.** Da bei der zweiten Lösung der Punkt  $Z$  durch Versuche zu ermitteln ist, so werden einige

[87] Anhaltspunkte hierfür nicht für unnütz erachtet werden. Zu diesem Behufe dient der Lehrsatz 3 (§ 76 ff.), mittelst dessen aus der heliocentrischen Distanz des Cometen seine Geschwindigkeit bestimmt werden kann und durch den diese Geschwindigkeit mit der eines in gleicher Entfernung befindlichen, auf einer Kreisbahn sich bewegendem Planeten verglichen wird. Da der Bogen oder die Sehne zwischen der ersten und dritten Beobachtung meistens klein ist, so wird die vom Cometen durchmessene Sehne mit jener, welche in derselben Zeit die Erde durchläuft, also mit  $AB$  in irgend einer Weise verglichen werden können. Nehmen wir an, der Comet sei in  $T$ , so ist klar, dass die von ihm durchlaufene Sehne sehr nahe  $\sqrt{2}AB$  (§ 76) sein müsste, was aber nicht sein kann, da sie zwischen den Geraden  $AD$  und  $BE$  liegen muss. Wenn nun der Punkt  $Z$  auf der Geraden  $tZ$  so angenommen wird, dass seine Distanz von der Sonne kleiner wird, als eben, so wird die Länge der Sehne vergrößert, welche er durchlaufen müsste. Man wird also  $Z$  erst dort annehmen dürfen, wo die Distanz von der Sonne anfängt grösser zu werden. Ist  $Z$  angenommen, so wird die Lage der projecirten Sehne meist schon nach dem Augenmaass allein nahe richtig gewählt und ihre Länge mit  $AB$  und der Entfernung von der Sonne verglichen.

§ 158. Aufgabe 32. (Fig. 17.) *Man soll eine schon nahe bekannte parabolische Bahn eines Cometen verbessern.*

[88] Lösung: Da die curtirten geocentrischen Distanzen  $AD$ ,  $TC$ ,  $BE$  in nahe richtigen Zahlen vorliegen, so wollen wir annehmen, sie seien zu klein, und die Differenzen, welche addirt werden müssen, damit sie in die wahren Werthe übergehen, seien so klein, dass ausser der ersten alle höheren Potenzen vernachlässigt werden können. Dann ist es erlaubt sie wie Differenziale zu behandeln, die bei der in Zahlen auszuführenden Rechnung hinzuzufügen sind. Die Rechnung selbst aber wird damit zu beginnen haben, dass aus den angenommenen Distanzen die Zeiten zwischen der ersten und zweiten, der zweiten und dritten, der dritten und ersten Beobachtung ermittelt werden. Dann werden die berechneten Zeiten mit den beobachteten verglichen, wodurch man zu drei Gleichungen kommt, aus welchen die Differenzen zwischen den angenommenen und den wahren Distanzen  $AD$ ,  $TC$ ,  $BE$  ermittelt werden können, die nun addirt oder subtrahirt werden müssen, je nachdem sie positiv oder negativ sind.

Die Herstellung jener Gleichungen aber wollen wir durch folgendes Beispiel zeigen.

Sei  $S$  die Sonne,  $T$  und  $t$  Oerter der Erde,  $K$  und  $k$  Projectionen der beiden Cometenörter  $C$  und  $c$  auf die Ekliptik, dann werden  $TK$  und  $tk$  durch die geocentrischen Längen

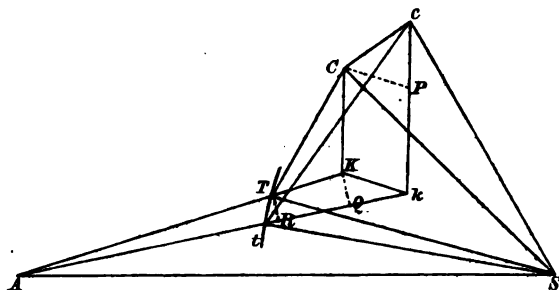


Fig. 17.

gegeben sein und die Winkel  $CTK$  und  $ctk$  sind die geocentrischen Breiten. Nun verlängert man  $TK$  und  $tk$  bis zu ihrem Schnittpunkt in  $A$ , verbindet  $A$  mit  $S$  und zieht  $CP$  parallel zu  $Kk$ . Setzt man dann

$$\begin{array}{llll} AT = \alpha & AK = K & CTK = C & TS = T \\ At = \beta & Ak = k & ctk = c & tS = \tau \\ TAt = \omega & TK = K' & CTS = e & \\ & tk = k' & ctS = f & \end{array}$$

[89] so wird:

$$\begin{aligned} \overline{Cc}^2 &= K^2 + k^2 - 2Kk \cos \omega + K'^2 \tan C^2 + k'^2 \tan c^2 \\ &\quad - 2K'k' \tan C \tan c. \end{aligned}$$

Weiter ist:

$$\begin{aligned} \overline{CS}^2 &= T^2 + K'^2 \sec C^2 - 2TK' \sec C \cos e \\ \overline{cS}^2 &= \tau^2 + k'^2 \sec c^2 - 2\tau k' \sec c \cos f. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke sind in Zahlen zu berechnen. Da ihnen aber Differenziale hinzuzufügen sind, so bemerken wir, dass die Grössen  $K, K', k, k'$  als variabel betrachtet werden müssen, und zwar sind, da

$$\begin{aligned} K &= K' + \alpha \\ k &= k' + \beta \end{aligned}$$

die Differenziale  $dK$ ,  $dK'$  und ebenso  $dk$ ,  $dk'$  nicht etwa gleich, sondern man wird durch Differenziation haben:

$$dCc = \frac{1}{Cc} (K + K' \tan C^2 - k \cos \omega - k' \tan c \tan C) dK \\ + \frac{1}{Cc} (k - K \cos \omega + k' \tan c^2 - K' \tan c \tan C) dk$$

$$d\overline{CS} = \frac{1}{\overline{CS}} (K' \sec C^2 - T \sec C \cos c) dK$$

$$d\overline{cS} = \frac{1}{\overline{cS}} (k' \sec c^2 - \tau \sec c \cos f) dk.$$

Da diese Ausdrücke wieder in Zahlen berechnet werden müssen, schreiben wir kurz

$$d\overline{Cc} = m dK + n dk$$

$$d\overline{CS} = p dK$$

$$d\overline{cS} = q dk.$$

Durch  $\overline{Cc}$ ,  $\overline{CS}$ ,  $\overline{cS}$  ist aber die Zwischenzeit gegeben nach der Formel (§ 83):

$$3 \mid 2mT = \left( \frac{\overline{CS} + \overline{cS} + \overline{Cc}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{\overline{CS} + \overline{cS} - \overline{Cc}}{2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Da nun die angenommenen curtirten geocentrischen Distanzen  $TK$  und  $tk$  von den wahren verschieden sind, so wird auch die Zwischenzeit  $T$ , welche diese Formel giebt, von der beobachteten [90] verschieden sein. Damit also  $T$  zur beobachteten Zwischenzeit werde, muss man der Formel ihr Differenzial hinzufügen, womit sie wird

$$3 \sqrt{2} m T = \left( \frac{\overline{CS} + \overline{cS} + \overline{Cc}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} - \left( \frac{\overline{CS} + \overline{cS} - \overline{Cc}}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \\ + \frac{3}{2} (\overline{CS} + \overline{cS} + \overline{Cc})^{\frac{1}{2}} (d\overline{CS} + d\overline{cS} + d\overline{Cc}) \\ - \frac{3}{2} (\overline{CS} + \overline{cS} - \overline{Cc})^{\frac{1}{2}} (d\overline{CS} + d\overline{cS} - d\overline{Cc}).$$

$\overline{CS}$ ,  $\overline{cS}$ ,  $\overline{Cc}$  sind in Zahlen gegeben, ebenso auch ihre Differenziale durch  $dK$  und  $dk$ ; man hat also auf diese Weise eine Gleichung zwischen  $dK$  und  $dk$  erhalten.



Nimmt man zu den hier benutzten Oertern noch den dritten hinzu, so erhält man auf dieselbe Weise zwei weitere Gleichungen zwischen  $dk$  und  $dt$  einerseits und  $dK$  und  $dt$  andererseits und kann also dann die drei Differenzen  $dK$ ,  $dk$ ,  $dt$  bestimmen. Sollten sie nach vollendeter Rechnung als beträchtlich sich herausstellen, so wird die Rechnung auf dieselbe Weise wiederholt, indem man jetzt für die in Fig. 16 mit  $AD$ ,  $TC$ ,  $BE$  bezeichneten Distanzen die durch die erste Verbesserung corrigirten Werthe annimmt.

§ 159. Aufgabe 34. \*) (Fig. 17.) Wenn zwei hinlänglich nahe geocentrische Oerter des Cometen gegeben sind und ausserdem die geocentrische Distanz des Cometen für eine der beiden Beobachtungen, so soll man die Lage und Grösse der Bahn ermitteln.

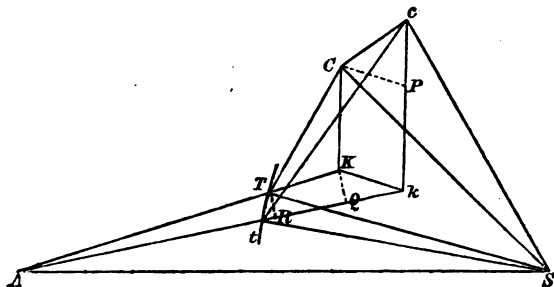


Fig. 17.

Lösung: Sei  $S$  das Centrum der Sonne,  $T$ ,  $t$  Oerter der Erde,  $C$ ,  $c$  Oerter des Cometen,  $K$ ,  $k$  deren Projectionen auf die Ekliptik. Dann sind  $TK$  und  $tk$  durch die beobachteten Längen gegeben und die Winkel  $CTK$  und  $ctk$  sind die beobachteten Breiten. Es möge nun noch die Distanz  $TC$  und damit auch  $TK = TC \cos CTK$  gegeben sein. Von den Punkten  $K$  und  $T$  fallen wir auf die Gerade  $tK$  die Normalen [91]  $KQ$  und  $TR$  und ziehen ferner wie bei der vorigen Aufgabe  $AS$  und  $CP$ . Sodann setzen wir:

$$\begin{array}{ll} TK = x & CTK = \lambda \\ Qk = y & ctk = A \\ tR = \alpha & TAt = \omega \\ AT = p & CTS = h \\ TS = r & \end{array}$$

\*) Aufgabe 33 fehlt im Original.

Da die geocentrischen Breiten  $\lambda$  und  $\mathcal{A}$  wenig von einander verschieden sind, werde gesetzt:

$$\text{tang } \mathcal{A} = \text{tang } \lambda + q;$$

dann sind  $y, \alpha, q, \omega$  hinlänglich kleine Grössen, da wir  $T, t$  bez.  $C, c$  als nahe beisammen liegende Oerter angenommen haben.

Es wird also sein:

$$\overline{AK} = x + p$$

$$\overline{KQ} = (x + p) \sin \omega$$

$$\overline{Kk}^2 = y^2 + (x + p)^2 \sin^2 \omega,$$

ferner:

$$\overline{AR} = p \cos \omega$$

$$\overline{AQ} = (x + p) \cos \omega$$

$$\overline{Ak} = (x + p) \cos \omega + y$$

$$\overline{Rk} = (x + p) \cos \omega - p \cos \omega + y = x \cos \omega + y$$

$$\overline{tk} = x \cos \omega + y - \alpha$$

und daher

$$\overline{ck} = (x \cos \omega + y - \alpha)(\text{tang } \lambda + q)$$

$$\overline{CK} = x \text{ tang } \lambda.$$

Mithin

$$\overline{cP} = x(\cos \omega - 1) \text{ tang } \lambda + (y - \alpha) \text{ tang } \lambda + xq \cos \omega + (y - \alpha)q$$

oder

$$\overline{cP} = y(\text{tang } \lambda + q) - \alpha(\text{tang } \lambda + q) - x(1 - \cos \omega) \text{ tang } \lambda + xq \cos \omega.$$

[92] Für diese Formel schreiben wir der Kürze halber

$$\overline{cP} = Ay + Bx - C.$$

Es ist aber

$$\overline{Cc}^2 = \overline{cP}^2 + \overline{Kk}^2.$$

Daher wird

$$\begin{aligned} \overline{Cc}^2 &= y^2 + (x + p)^2 \sin^2 \omega + A^2 y^2 + 2AByx + C^2 \\ &\quad - 2ACy - 2BCx + B^2 x^2 \end{aligned}$$

oder

$$\overline{Cc}^2 = Dy^2 + Ey + F.$$

Weiter wird sein

$$\overline{CS}^2 = r^2 + x^2 \sec^2 \lambda^2 - 2rx \sec \lambda \cos h.$$

Nach der zweiten Lösung der Aufgabe 15 (§ 83) ist

$$3\sqrt{2}mT = \frac{k(a+b+\frac{1}{2}\sqrt{V(a+b)^2-k^2})}{\sqrt{a+b+V(a+b)^2-k^2}}$$

oder, da die Sehne  $k$  klein und auch sehr nahe  $a = b$  ist,

$$3\sqrt{2}mT = \frac{3k\sqrt{a}}{2}$$

$$k = \frac{\sqrt{8}mT}{\sqrt{a}}$$

oder

$$\overline{Cc} = \frac{\sqrt{8}mT}{\sqrt{\overline{CS}}}$$

und daher nach Substitution der Werthe

$$Dy^2 + Ey + F = \frac{8m^2T^2}{\sqrt{r^2 + x^2 \sec^2 \lambda^2 - 2rx \sec \lambda \cos h}}.$$

Aus dieser Gleichung kann, wenn die Distanz  $x$  gegeben ist,  $y$  gefunden werden und damit die Lage der projecirten Sehne  $Kk$ . Ist dies aber erreicht, so kann die ganze Bahn leicht ermittelt werden.

[93] § 160. **Anmerkung.** Da die Gleichung, auf welche wir schliesslich gekommen sind, quadratisch ist, so ergeben sich zwei Werthe von  $y$  und es muss daher eine dritte Beobachtung zugezogen werden, um entscheiden zu können, welche der Wirklichkeit entspricht. Weiter nahmen wir an, dass die Distanz  $x$  gegeben sei. Wenn sie aber unbestimmt ist, so kann man nach einander verschiedene Werthe dafür einsetzen, bis schliesslich  $y$  imaginär herauskommt. Es werden hierdurch die Grenzen gegeben, über welche die Distanz  $x$  nicht hinausgehen kann und sie werden gefunden, wenn man in der letzten Gleichung  $y = 0$  setzt. Die Gleichung geht dadurch in eine andere über, in welcher  $x$  in der sechsten Potenz auftritt.

§ 161. **Aufgabe 35.** (Fig. 18.) Gegeben sei die Lage einer parabolischen Cometenbahn; man soll die Lage und die Eigenschaften der auf die Ekliptik projecirten Bahn ermitteln.

**Lösung:** Sei  $F$  das Centrum der Sonne und daher der Brennpunkt der Bahn,  $Nn$  die Knotenlinie,  $NQn$  die Bahn selbst, die gegen die Ebene der Ekliptik unter einem beliebigen Winkel geneigt ist,  $A$  sei das Perihel,  $AFB$  die Axe. Wird ein beliebiger Punkt  $Q$  angenommen und  $QP$  senkrecht zu  $Nn$  gefällt und das Verhältniss  $QP$  zu  $qP$  gleich dem Verhältniss von 1 zum Cosinus der Neigung gemacht, so wird der Punkt  $q$  in der projecirten Bahn liegen und der Punkt  $Q$  wird senkrecht darüber liegen.

[94] Wenn  $Q$  der höchste Punkt der Bahn über der Ekliptik ist, dann wird die Richtung beider Parabeln in  $Q$  und  $q$  der Knotenlinie parallel sein. Halbirt man  $Nn$  in  $G$  und zieht  $FQ$ ,  $Fq$ ,  $GQ$ ,  $Gq$ , so wird  $GQ$  der Axe  $AB$  und  $Gq$  der Axe der projecirten Bahn  $ab$  parallel und es ist  $FQ = QG$ ,  $Fq = qG$ ,  $FP = PG$ . Weiter verhält sich  $FQ$  zu  $Fq$  wie 1 zum Cosinus der heliocentrischen Breite jenes höchsten Punktes  $Q$ .

Da  $NG = Gn$  und  $Gq$  der Axe  $aB$  parallel ist, so geht die Gerade  $qF$  durch den Brennpunkt  $f$  der projecirten Bahn und es ist:

$$\overline{Nn}^2 = 16 FQ^2 = 16 Fq \cdot fq$$

und daher

$$Fq : FQ = FQ : fq.$$

Da aber beide Parabeln in  $Q$  und  $q$  der Knotenlinie  $Nn$  parallel sind, so werden die Winkel, welche sie mit  $FQ$  bez.  $Fq$  bilden, den Winkeln  $QGF$  bez.  $qGF$  gleich und daher wird:

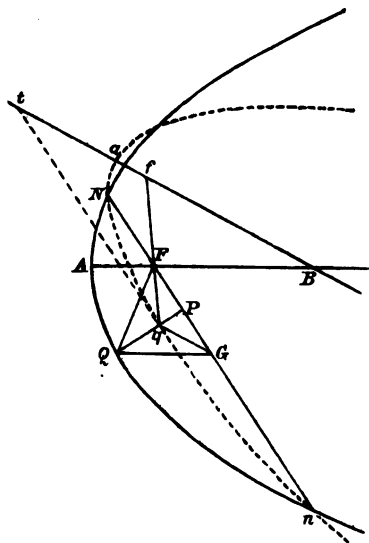


Fig. 18.

$$AF = FQ \sin QGF^2 = \frac{PQ^2}{FQ}$$

$$af = fq \sin qGF^2 = \frac{fq \cdot PQ^2}{Fq^2}.$$

Nennt man  $\eta$  die Neigung der Bahn, so ist

$$Pq = PQ \cos \eta$$

und daher

$$af = \frac{fq \cdot PQ^2 \cos \eta}{Fq^2},$$

also ferner

$$AF : af = Fq^2 : FQ \cos \eta^2 \cdot fq.$$

Es ist aber

$$fq = \frac{FQ^2}{Fq}$$

also:

$$AF : af = Fq^3 : FQ^3 \cos \eta^2.$$

[95] Da  $\frac{Fq}{FQ}$  der Cosinus der heliocentrischen Breite des Punktes  $Q$  ist, so wird, wenn wir diese mit  $\lambda$  bezeichnen:

$$AF : af = \cos \lambda^3 : \cos \eta^2$$

$$\sqrt{af} = \frac{\sqrt{AF} \cdot \cos \eta}{\cos \lambda^{\frac{3}{2}}}.$$

Wird vom Radiusvector eine beliebige Fläche beschrieben, die wir  $A$  nennen wollen und ist die dazu gebrauchte Zeit  $T$ , so wird

$$T = \frac{A}{m \sqrt{2AF}}.$$

Da aber diese Fläche in der projecirten Bahn verkleinert ist im Verhältniss  $1 : \cos \eta$ , so wird sie sein  $A \cos \eta = D$ . Da nun

$$T = \frac{A}{m \sqrt{2AF}} = \frac{A \cos \eta}{m \sqrt{2af \cos \lambda^{\frac{3}{2}}}}$$

so folgt

$$T = \frac{D}{m \sqrt{2af \cos \lambda^{\frac{3}{2}}}}.$$

Die Zeit wird also gegeben durch die auf die Ekliptik projectirte Fläche  $D$ , durch den Halbparameter der projectirten Bahn  $2af$  und durch den Cosinus der heliocentrischen Breite des höchsten Punktes  $Q$ .

§ 162. **Aufgabe 36.** (Fig. 18.) Gegeben sei die projectirte Bahn  $aqn$ ; man soll die wahre Bahn  $NQn$  finden und deren Neigung und Knotenlinie.

[96] Lösung: Es sei  $aNqn$  die projectirte Bahn, ihre Axe  $af$ , ihr Brennpunkt  $f$ , und das Centrum der Sonne  $F$ . Da  $F$  der Brennpunkt der wahren Bahn ist, so führe man die Gerade  $fFq$  durch beide Brennpunkte, ziehe die Tangente  $tq$  und zu ihr die Parallele  $NFn$  durch den Mittelpunkt der Sonne  $F$ ; das wird dann die Knotenlinie sein. Fällt man auf diese die Normale  $QqP$  und macht  $FQ = \frac{1}{2}Nn$ , so wird der Punkt  $Q$  der höchste Punkt der wahren Bahn sein und  $\frac{qP}{QP}$  der Cosinus der Neigung. Endlich mache man  $QG = QF$  oder  $NG = Gn$ , und ziehe zu  $QG$  die Parallele  $AF$ , dann ist dies die Axe der wahren Bahn. Da  $AF = \frac{PQ^2}{FQ}$  (§ 161), so ist damit auch die Periheldistanz  $AF$  gefunden.

§ 163. **Lehrsatz 11.** Die projectirte Bahn ist durch lauter geocentrische Längen gegeben und fünf Beobachtungen sind zu ihrer Bestimmung erforderlich.

Beweis: Die projectirte Bahn ist bestimmt, sobald der Scheitel  $a$  und der Brennpunkt  $f$  gegeben sind oder die Lage dieser beiden Punkte in Bezug auf eine Gerade, die von einem gegebenen Ort der Erde nach dem Centrum der Sonne gezogen wird. Es hängt daher diese Lage von vier zu diesem Ende anzunehmenden Unbekannten ab. Sind aber diese angenommen, so wird die Knotenlinie  $nN$  gegeben sein (§ 162), ferner die Distanz  $af$  und die beiden Geraden  $FQ$  und  $Fq$  und dann  $Fq:FQ = \cos \lambda$  (§ 161). Da nun diese vier angenommenen Unbekannten durch geocentrische Längen und durch die in der projectirten Bahn zurückgelegten Räume zu bestimmen sind, [97] so werden diese Räume gegeben sein, welche mit den verflossenen Zeiten verglichen werden können (§ 161) und jeder Raum führt zu einer Gleichung. Weil nun aber vier Gleichungen nöthig sind, so braucht man auch vier projectirte Räume und daher fünf beobachtete geocentrische Längen.

§ 164. **Lehrsatz 12.** *Wenn sich ein Comet zur Zeit einer Beobachtung im Pol der Ekliptik befindet, so ist die projecirte Bahn durch drei weitere geocentrische Längen bestimmt.*

Beweis: Wenn nämlich der Ort des Cometen im Pol der Ekliptik auf diese projecirt wird, so fällt dieser Punkt auf den Ort, wo sich zur selben Zeit die Erde befindet. Welches daher auch Lage und Grösse der projecirten Bahn sein möge, jedenfalls muss sie durch diesen Ort der Erde hindurchgehen. Es ist also ein gewisser bestimmter Punkt der Bahn gegeben. Daraus folgt, dass aus vier anzunehmenden Unbekannten eine als überflüssig ausscheidet, wodurch die Zahl der Räume und damit der beobachteten Längen vermindert wird.

§ 165. **Anmerkung 1.** Es versteht sich von selbst, dass wenn der Comet im Pol der Ekliptik stationär gewesen ist, dann die projecirte Bahn bereits bestimmt sein wird, wenn man diesen zwei Beobachtungen eine dritte hinzufügt. Uebrigens wird die Rechnung, durch welche die Bahn bestimmt wird, auf eine wunderbare Weise complicirt, so dass man es unter allen [98] Umständen vorzieht, die geocentrischen Breiten zugleich mit den Längen zur Bestimmung der Bahn anzuwenden.

§ 166. **Anmerkung 2.** Was wir bisher über die Projection der Cometenbahn auf die Ekliptik gesagt haben, gilt allgemein, da die Projection auf die Ebene der Ekliptik rein willkürlich ist und man auch eine beliebige andere Ebene wählen kann, deren Lage gegen die Ekliptik gegeben ist. Diese tritt dann an die Stelle der Ekliptik und auf sie sind die Oerter der Erde zu projeciren und ebenso die Geraden, welche von diesen nach den Oertern des Cometen gezogen sind, wie wir dies schon bei der Aufgabe 31 (§ 155) durch ein Beispiel erläutert finden. Ebenen dieser Art, welche zur Abkürzung der Rechnung beitragen können, giebt es mehrere. So bringt uns z. B. die Ebene, welche durch die Centra von Sonne, Erde und Comet geht, dieselbe Vereinfachung, wie die Ekliptik, wenn der Comet sich in einem seiner Knoten befindet. Und ähnlich bietet uns die Ebene, welche auf der von dem Centrum der Erde nach dem Cometen gezogenen Geraden senkrecht steht, einen Fall dar, der analog ist zu jenem von Lehrsatz 12 (§ 164).

§ 167. **Lehrsatz 13.** *Wenn ein Comet derartig stationär ist, dass er viermal an demselben Orte des Himmels beobachtet wird, so kann seine Bahn ohne alle Rechnung gefunden werden.*

[99] Beweis: Wenn er nämlich stationär ist, so sind die Geraden, die von den Oertern der Erde nach den Oertern des Cometen gezogen werden, parallel. Nimmt man daher eine Ebene, die durch das Centrum der Sonne geht und auf jenen Geraden senkrecht steht, so sind in dieser Ebene vier Punkte der auf sie projecirten Bahn gegeben. Da diese parabolisch ist, so kann sie construirt werden. Durch die Aufgabe 36 (§ 162) wird dann weiter Lage und Grösse der wahren Bahn gegeben.

§ 168. Anmerkung. Es wird allerdings kaum jemals ein Comet viermal an derselben Stelle des Himmels beobachtet werden, wenn die Zwischenzeiten beträchtlich sind. Sind sie aber kurz, so muss man sehr genaue Beobachtungen haben, wenn man auf diese Weise die wahre Bahn ermitteln will. Man wird aber doch eine angeben können, welche von der wahren wenig abweicht, wenn die scheinbare Bewegung des Cometen sehr langsam ist.

§ 169. Lehrsatz 14. (Fig. 19.) Wenn ein Comet zweimal an derselben Stelle des Himmels beobachtet wird, so fallen die Geraden, welche von den beiden Erdörtern nach den beiden Cometenörtern gezogen werden, in die Knotenlinie.

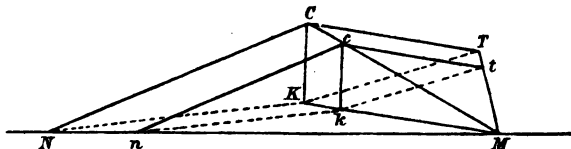


Fig. 19.

Beweis: Seien  $T$  und  $t$  die Oerter der Erde,  $C$  und  $c$  die des Cometen. Von letzteren fälle man auf die Ebene die Normalen  $CK$  und  $ck$  und ferner die Normalen  $CN$  und  $cn$  auf die Knotenlinie  $Nn$ . Dann ziehe man die Geraden  $NK$ , [100]  $nk$ ,  $TK$ ,  $tk$ ,  $CcM$ ,  $TtM$ . Da nun der Comet stationär ist, so sind die Geraden  $TC$  und  $tc$  und ebenso  $TK$  und  $tk$  parallel; überdies sind die Breiten  $CTK$  und  $ctk$  einander gleich. Daraus folgt:

$CK:ck = CT:ct = KT:kt = CM:cM = TM:tM = KM:kM$ ,  
also schneiden sich die Geraden  $Tt$ ,  $Cc$ ,  $Kk$  in  $M$ . Weiter ist:  
 $CK:ck = CN:cn = Kn:kn = CM:cM = KM:kM = NM:nM$ ,



also geht die Gerade  $Nn$  durch denselben Punkt  $M$ , in dem sich  $Cc$ ,  $Kk$ ,  $Tt$  schneiden. Es ist also  $Nn$  die Knotenlinie, woraus sich die Behauptung ergibt.

§ 170. **Lehrsatz 15.** *Wenn ein Comet sich in der Ebene der Ekliptik bewegt und seine Bahn ist eine parabolische, so genügen drei geocentrische Längen, um dieselbe zu bestimmen; dagegen ist noch eine vierte nothwendig, wenn er sich in einer Ellipse bewegt, ausser wenn deren grosse Axe bekannt ist.*

Beweis: Dass drei Längen zur Bestimmung der parabolischen Bahn genügen, erhellt aus Aufgabe 31 (§ 155) und die Construction der Bahn wird hier noch leichter. Dagegen, wenn diese drei Längen zur Parabel nothwendig sind, so kommt bei der Ellipse noch das Verhältniss zwischen der Periheldistanz und dem Halbparameter dazu; dieses bliebe unbestimmt, wenn nicht eine vierte Beobachtung dazukäme, ausser es ist die Länge der grossen Axe bekannt oder was dasselbe ist, die Umlaufszeit.

[101] § 171. **Anmerkung.** Ist die parabolische Bahn gegen die Ekliptik geneigt, so sind drei Beobachtungen erforderlich, aber nicht vollständig; man kann entweder die Zeit, zu der die zweite Beobachtung angestellt ist, oder die geocentrische Länge oder die Breite entbehren. Wenn nichtsdestoweniger drei vollständige Beobachtungen herangezogen werden, so hat man mehr Daten als nöthig sind und die überflüssigen können zur Vereinfachung der Rechnung oder wenigstens zur Controle derselben benutzt werden.

[102]

## Vierter Theil.

### Eigenschaften der elliptischen Bahnen der Cometen und Planeten.

§ 172. **Lemma 23.** (Fig. 20.) *Wenn in einer Ellipse drei aequidistante Ordinaten  $PN$ ,  $QL$ ,  $RM$  genommen werden und man zieht aus dem Brennpunkt  $F$  die Radienvectoren  $FN$ ,  $FL$ ,  $FM$ , so ist  $2FL = FN + FM$ .*

Beweis: Nach der Natur der Ellipse ist nämlich

$$FN = AF + \frac{AB - 2AF}{AB} AP$$

$$FM = AF + \frac{AB - 2AF}{AB} AR,$$

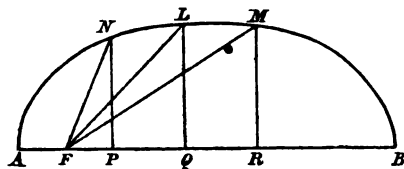


Fig. 20.

daher:

$$FN + FM = 2AF + \frac{AB - 2AF}{AB} (AP + AR).$$

[103] Nun ist nach der Voraussetzung:

$$AP + AR = 2AQ,$$

daher

$$FN + FM = 2 \left( AF + \frac{AB - 2AF}{AB} AQ \right) = 2FL.$$

§ 173. **Lemma 24.** (Fig. 21.) Wenn in einer Ellipse  $AQBD$  ein beliebiger Punkt  $Q$  angenommen und durch ihn der Durchmesser  $QCD$ , ferner die Tangente  $QT$  und zu ihr eine beliebige Parallele  $NGM$  gezogen wird, dann der Brennpunkt  $F$  mit  $Q$  durch die Gerade  $QFb$  verbunden und die Strecke  $NM$  senkrecht in die Lage  $nEm$  übertragen wird, so dass  $nE = Em$  ist, dann liegen die Punkte  $n$  und  $m$  ebenfalls auf einer Ellipse  $Qnbm$ , deren einer Brennpunkt gleichfalls  $F$ , und deren grosse Axe  $Qb$  der grossen Axe der ersten Ellipse gleich ist.

Beweis: Da  $QCD$  ein Durchmesser der Ellipse und die Strecke  $NM$  der Tangente  $QT$  parallel ist, so findet nach einer bekannten Eigenschaft der Kegelschnitte zwischen der Abscisse  $QG$  und der Ordinate  $NM$  eine analoge Gleichung statt, wie zwischen Abscissen in der grossen Axe und darauf senkrecht stehenden Ordinaten. Weil nun nach der Construction  $NM = nm$  und  $QE$  dieselbe Rolle hat wie  $QG$ , ferner  $nm$  senkrecht steht auf  $FQ$ , so wird zwischen  $QE$  und  $nm$  dieselbe Gleichung in Bezug auf die Ellipse statthaben, deren grosse Axe  $Qb$  ist. Zieht man also  $Cc$  parallel zu  $QT$  und

errichtet  $c\gamma = c'C$  senkrecht zur Axe  $Qb$ , so wird  $c\gamma$  die kleine Halbaxe sein. Wird nun

$$AB = a, \quad AF = f, \quad FQ = z$$

[104] gesetzt, und die Gerade  $Qf$  nach dem zweiten Brennpunkt  $f$  gezogen, so wird der Winkel  $TQF = 90^\circ - \frac{1}{2}FQf$  und

$$FQ + Qf = a$$

$$Qf = a - z$$

$$Ff = a - 2f.$$

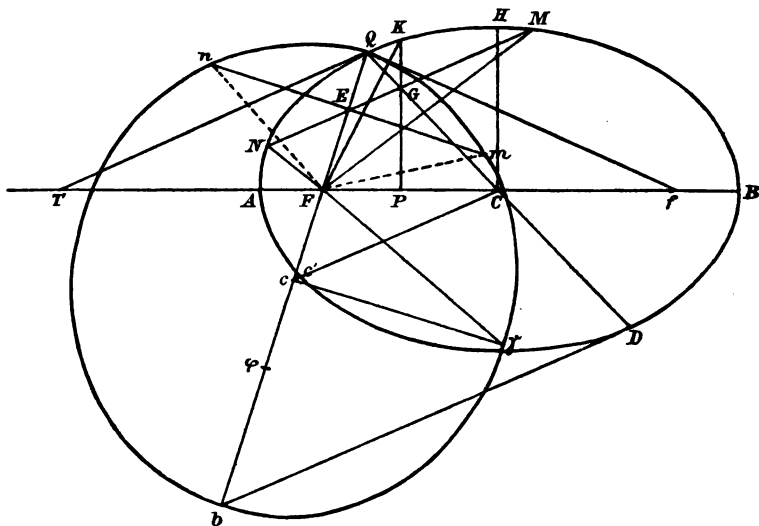


Fig. 21.

Hieraus folgt nach trigonometrischen Formeln:

$$\cos \frac{1}{2} FQf = \sin TQF = \sin QcC = \frac{\sqrt{af - f^2}}{\sqrt{ax - z^2}}$$

$$\cos TQF = \cos QcC = \frac{\sqrt{ax - z^2} - (af - f^2)}{\sqrt{ax - z^2}}$$

$$\cos QFC = \frac{ax - 2(af - f^2)}{z(a - 2f)}$$

$$\sin QFC = \frac{2\sqrt{af - f^2}}{z(a - 2f)} \sqrt{ax - z^2 - (af - f^2)}$$

und es wird daher, weil  $QTC = QFC - TQF = FCc$ ,

$$\sin FCc = \frac{(a - 2x)\sqrt{af - f^2}}{(a - 2f)\sqrt{ax - x^2}}.$$

Es ist aber

$$Fc : \sin FCc = FC : \sin QcC$$

und daher, wenn die gefundenen Werthe substituirt werden und reducirt wird:

$$\begin{aligned} FC &= \frac{1}{2}a - f \\ Fc + x &= Qc = \frac{1}{2}a \\ Qb &= a = AB. \end{aligned}$$

Es ist weiter der conjugirte Halbmesser  $Cc' = c\gamma = \sqrt{ax - x^2}$  und daher wegen  $\overline{F\gamma^2} = \overline{Fc^2} + \overline{c\gamma^2}$

$$\begin{aligned} \overline{F\gamma^2} &= (\tfrac{1}{2}a - x)^2 + (ax - x^2) = \tfrac{1}{4}a^2 \\ \overline{F\gamma} &= \tfrac{1}{2}a = Qc. \end{aligned}$$

Daraus erhellt, dass  $F$  Brennpunkt in beiden Ellipsen ist.

[105] § 174. **Zusatz I.** Aehnlich erhält man den Halbmesser

$$QC = \sqrt{\tfrac{1}{4}(a - 2x)^2 + af - f^2} = \sqrt{\overline{Fc^2} + \overline{CH^2}}$$

und weiter:

$$\sin QCc = \frac{a\sqrt{af - f^2}}{2\sqrt{ax - x^2}\sqrt{\tfrac{1}{4}(a - 2x)^2 + af - f^2}}.$$

§ 175. **Zusatz 2.** Da in der Ellipse  $AHB$ :

$$GM^2 = \frac{QG \cdot GD \cdot Cc'^2}{QC^2}$$

und in der Ellipse  $Q\gamma b$ :

$$\frac{QG \cdot GD}{QC^2} = \frac{QE \cdot Eb}{Qc^2},$$

so wird:

$$GM^2 = Em^2 = \frac{QE \cdot Eb \cdot Cc'^2}{Qc^2}.$$

§ 176. **Zusatz 3.** Wird daher  $FE = \xi$  gesetzt, so wird:

$$\begin{aligned} Em^2 &= \frac{[ax - a\xi - (x - \xi)^2](ax - x^2)}{\tfrac{1}{4}a^2} \\ Fm &= \frac{2(ax - x^2) - (a - 2x)\xi}{a}. \end{aligned}$$

§ 177. **Lemma 25.** (Fig. 21.) Wird alles wie im vorigen Lemma angenommen, und werden noch die Radienvectoren  $Fn$ ,  $Fm$ ,  $FN$ ,  $FM$  gezogen, so ist die Summe der ersteren  $Fn + Fm$  gleich der Summe der letzteren  $FN + FM$ .

[106] Beweis. Man ziehe durch den Punkt  $G$  die Gerade  $PGK$  senkrecht zur grossen Axe  $AB$ , und verbinde  $K$  mit dem Brennpunkt  $F$ . Da  $NG = GM$ , so wird nach Lemma 23 (§ 172)

$$2FK = FN + FM.$$

Da ferner  $Fn = Fm$ , so ist nachzuweisen, das  $Fn = FK$  ist.

Weil nun  $TQ$ ,  $EG$  und  $cC$  parallel sind, so wird

$$cQ : QC = cE : GC$$

$$CG = \frac{QC \cdot cE}{cQ}$$

oder nach Substitution der Werthe:

$$CG = \frac{(\xi + \frac{1}{2}a - x) \sqrt{\frac{1}{4}(a - 2x)^2 + af - f^2}}{\frac{1}{2}a}.$$

Weiter ist durch Trigonometrie

$$\cos QCF = \frac{QC^2 + CF^2 - QF^2}{2QC \cdot CF}$$

$$CP = CG \cos QCF,$$

also nach Substitution der Werthe

$$\begin{aligned} \cos QCF &= \frac{\frac{1}{2}a(a - 2x)}{(a - 2f) \sqrt{\frac{1}{4}(a - 2x)^2 + af - f^2}} \\ CP &= \frac{(a - 2x)(2\xi + a - 2x)}{2(a - 2f)}. \end{aligned}$$

Hieraus:

$$PF = FC - CP = \frac{(a - 2f)^2 - (a - 2x)^2 - 2(a - 2x)\xi}{2(a - 2f)}.$$

Es ist aber nach der Natur der Ellipse

$$FK = \frac{2(af - f^2)}{a} + \frac{a - 2f}{a} FP$$

[107] und daher nach Substitution und gehöriger Reduction

$$FK = \frac{2(ax - x^2)}{a} - \frac{(a - 2x)\xi}{a}.$$

Denselben Werth aber haben wir für den Radius  $Fm$  (§ 176) erhalten und es wird daher

$$FK = Fm$$

$$2FK = 2Fm = Fn + Fm = FN + FM.$$

§ 178. **Lemma 26.** (Fig. 21.) Wird alles wie in den beiden vorigen Sätzen angenommen, so verhalten sich die Flächen der Sektoren  $NQM$  und  $nQm$  wie die Quadratwurzeln aus den Halbparametern der Ellipsen  $AB$  und  $Qb$ .

Beweis. Wenn nämlich die Ordinaten  $NM$  auf dem Durchmesser  $QD$  senkrecht ständen, so würde die Fläche des Segmentes  $NMQ$  im umgekehrten Verhältniss des Sinus der Neigung  $QGN$  grösser sein. Wenn sie daher nach  $nm$  übertragen zur Axe  $Qb$  senkrecht stehen, so wird das Segment  $nQm$  unter allen Umständen in diesem Verhältniss grösser sein müssen. Da aber die Abscissen  $QE$  grösser sind, als die Abscissen  $QG$ , so ist das Segment  $nQm$  ebenfalls in diesem Verhältniss grösser, d. h. es ist

$$nQm = \frac{NQM \cdot QE}{\sin QGE \cdot QG}.$$

Nun ist durch Trigonometrie

$$\frac{QE}{QG \sin QGE} = \frac{1}{\sin QEG} = \frac{1}{\sin TQF}$$

[108] und daher das Segment

$$nQm = \frac{NQM}{\sin TQF}.$$

Nun ist aber (§ 173)

$$\sin TQF = \sqrt{\frac{af - f^2}{ax - x^2}}$$

und daher

$$nQm = NQM \sqrt{\frac{ax - x^2}{af - f^2}}$$

$$nQm : NQM = \sqrt{ax - x^2} : \sqrt{af - f^2}.$$

Da ferner die Dreiecke  $nFm$  und  $NFM$  gleiche Grundlinien  $nm$  und  $NM$  haben, so verhalten sich die Flächen derselben wie die aus dem Brennpunkt oder dem gemeinsamen Scheitel  $F$

auf sie gefällten Lote und daher wie 1 zum Sinus des Winkels  $NEF = TQE$ . Also hat man ebenfalls:

$$nFm : NFM = \sqrt{ax - x^2} : \sqrt{af - f^2}$$

und ebenso die ganzen Sectoren

$$nQmF : NQMF = \sqrt{ax - x^2} : \sqrt{af - f^2}.$$

Die Halbparameter der beiden Ellipsen sind aber

$$\frac{2(af - f^2)}{a} = s$$

$$\frac{2(ax - x^2)}{a} = S,$$

also

$$\text{Sectoren } nQmF : NQMF = \sqrt{\frac{aS}{2}} : \sqrt{\frac{as}{2}} = \sqrt{S} : \sqrt{s},$$

was zu beweisen war.

[109] § 179. **Zusatz.** Es wird daher

$$\frac{nQmF}{\sqrt{S}} = \frac{NQMF}{\sqrt{s}}.$$

§ 180. **Lemma 27.** (Fig. 22.) Beschreibt man um die grosse Axe einer Ellipse  $AB$  einen Halbkreis, halbirt eine be-

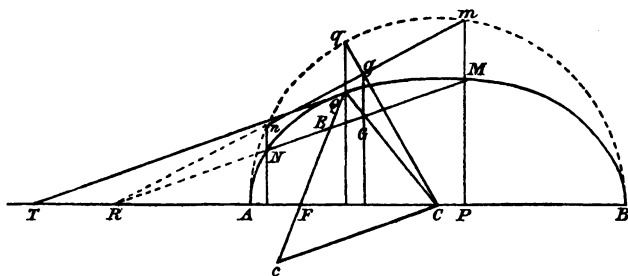


Fig. 22.

liebige Sehne  $NM$  derselben in  $G$ , zieht aus dem Centrum  $C$  die Gerade  $CGQ$ , verbindet  $Q$  mit dem Brennpunkte  $F$  durch die Gerade  $FQ$  und zieht endlich die Gerade  $Cc$  parallel zur Sehne  $NM$  oder zur Tangente  $TQ$ , so gilt folgender Satz: Wenn

durch die Punkte  $N, Q, M$  die Normalen  $Nn, Qq, Mm$  zur grossen Axe gefällt werden und man verbindet die Punkte  $n, m$  und  $q, C$  durch Gerade, so wird der Bogen  $nm$  in  $q$  halbirte und der Pfeil  $qg = QE$ .

Beweis: Nach der Natur der Ellipse stehen nämlich die Ordinaten  $Pm$  und  $PM$  in dem Verhältniss der grossen zur kleinen Axe und es schneiden sich daher die Sehnen  $mn$  und  $MN$  verlängert in dem Punkte  $R$  der grossen Axe. Da nun  $NG = GM$ , so folgt  $ng = gm$ . Weiter ist  $CQ:QG = Cq:qg$ . Da ferner  $NM$  und  $Cc$  parallel sind, so wird  $CQ:QG = Qc:QE$  und daher

$$Cq:qg = Qc:QE.$$

Es ist aber (§ 173)

$$Cq = AC = Qc,$$

mithin:

$$qg = QE.$$

[110] § 181. **Zusatz.** Da  $Qc$  die grosse Halbaxe der zweiten Ellipse  $Qb$  (Fig. 21) ist und der Halbaxe  $AC$  gleich ist, so erhellt (Fig. 22), dass der Pfeil  $QE$  gleich ist dem sinus versus des Kreisbogens  $nq$ . Es sind daher nicht nur die Sehnen der Ellipsen  $NM$  und  $nm$  (Fig. 22) einander gleich, sondern auch die Sehnen der Kreisbogen, die zu ihnen gehören.

§ 182. **Anmerkung.** (Fig. 22.) Um dies noch klarer auseinanderzusetzen, stellen wir uns vor, dass die Ellipse  $ANMB$  die orthographische Projection des Kreises  $AnmB$  sei, der gegen dieselbe geneigt ist und dessen Ebene mit der Ebene der Ellipse sich in der Knotenlinie  $AB$  schneiden und der Cosinus des Neigungswinkels gleich  $PM:Pm$  ist. Es wird dann die Sehne  $NM$  die Projection der Kreissehne  $nm$  und ebenso wird die elliptische Sehne  $nEm$  (Fig. 21) die Projection der Sehne desjenigen Kreises, dessen Durchmesser und Schnittlinie die grosse Axe  $Qb$  ist und dessen Neigungswinkel durch seinen Cosinus  $= cy:Qc$  bestimmt ist. Also sind nach dem vorigen Zusatz nicht nur die Kreissehnen gleich, sondern auch die elliptischen, die die Projectionen von jenen sind.

§ 183. **Lehrsatz 15<sup>a</sup>.** (Fig. 21.) Wird alles wie im Lemma 24 (§ 173) angenommen, so können beide Ellipsen  $Qmb$  und  $AQB$  Cometenbahnen sein und beide werden in derselben Zeit durchlaufen.



[111] Beweis: Es ist nämlich beiden Ellipsen der Brennpunkt  $F$  gemeinsam, in welchem nach Gesetz 3 (§ 68) das Centrum der Sonne sein wird, welches nothwendig mit dem Brennpunkte des Kegelschnittes zusammenfallen muss, in dem sich ein Comet bewegt. Weil ferner nach Lemma 24 die beiden Axen  $AB$  und  $Qb$  gleich sind, so muss nach § 71 auch die Umlaufszeit dieselbe sein.

§ 184. **Lehrsatz 16.** (Fig. 21.) *Unter denselben Voraussetzungen wie zuvor werden die Bogen  $nQm$  und  $NQM$  in derselben Zeit durchlaufen.*

Beweis: Nach Gesetz 4 (§ 69) verhalten sich die Zeiten wie die Flächen, welche der Radiusvector überstreicht, dividirt durch die Quadratwurzeln aus den Halbparametern; also verhält sich die Zeit, in welcher der Bogen  $NM$  durchlaufen wird zur Zeit, in welcher  $nQm$  durchlaufen wird wie

$$\frac{NQMF}{\sqrt{s}} : \frac{nQmF}{\sqrt{S}}.$$

Da nun nach § 179

$$\frac{NQMF}{\sqrt{s}} = \frac{nQmF}{\sqrt{S}},$$

so folgt nothwendig die Gleichheit der Zeiten.

§ 185. **Aufgabe 37.** (Fig. 21.) *Wenn ein Comet in einer elliptischen Bahn einen beliebigen Bogen  $NQM$  durchläuft, so soll man die unendlich vielen anderen Ellipsen angeben, in welchen er in der nämlichen Zeit Bogen durchlaufen würde, welche dieselbe Sehne  $NM$  haben und bei welchen die Summe der äusseren Radienvectoren gleich der Summe der äusseren Radienvectoren  $FN + FM$  ist.*

[112] Erste Lösung. Man halbire die Sehne  $NM$  in  $G$  und ziehe vom Centrum  $C$  die Gerade  $CGQ$ ; dann wird jede Ellipse, die mit der gegebenen isochron ist oder mit ihr gleiche Umlaufszeit hat, der Aufgabe genügen, wenn man sie so legt, dass sie durch den Punkt  $Q$  geht und ihr Brennpunkt mit dem Brennpunkte der gegebenen Ellipse zusammenfällt.

Zweite Lösung. (Fig. 22.) Man betrachte die Ellipse  $AQB$  als die orthographische Projection des Kreises  $AqB$ , dann wird die Sehne  $NM$  die Projection der Sehne  $nm$  sein. Dann verschiebe man den Bogen  $nm$  nach Belieben auf dem Kreise  $AqB$  und suche durch Aenderung der Neigung die

projicirte Sehne, welche der gegebenen  $NM$  gleich ist. Dadurch erhält man zwei Punkte der zu construierenden Ellipse und überdies die beiden Scheitel  $A$  und  $B$ . Die construirte Ellipse hat man dann so zu legen, dass ihr Brennpunkt mit dem Brennpunkte  $F$  zusammenfällt.

§ 186. **Anmerkung.** Nehmen wir der Kürze halber an,  $nm$  sei die verschobene Sehne selbst, dann fällen wir  $nN$  und  $mM$  zur Axe normal und verlängern die Sehne  $nm$  bis  $R$ , wo sie die Axe schneidet. Nun suche man zu  $nm$ ,  $Rm$  und der gegebenen Sehne die vierte Proportionale ( $nm:Rm = NM:x$ ). Mit dieser schneide man aus  $R$  in  $M$  ein, dann werden  $N$  und  $M$  jene zwei gesuchten Punkte der Ellipse  $ANMB$  sein und der Bogen  $NM$  wird der Aufgabe genügen.

§ 187. **Definition 4.** Unter dem »elliptischen Fall des Cometen gegen die Sonne« verstehen wir dessen Bewegung in einer Ellipse, deren kleine Axe oder Halbparameter gleich Null [113] ist oder deren Scheitel mit dem Brennpunkte im Centrum der Sonne zusammenfällt.

§ 188. **Zusatz 1.** Weil die grosse Axe der Ellipse endlich ist, so ist vom elliptischen Fall der Anfang gegeben und der Comet, der auf diese Weise in die Sonne fällt, beginnt seine Bewegung vom Zustande der Ruhe aus und durchmisst dann die ganze grosse Axe.

§ 189. **Zusatz 2.** Weil ferner die Umlaufszeit eines in einer Ellipse wandelnden Cometen nur von der Länge seiner grossen Axe abhängt (§ 71), so erhellt, dass wenn diese gegeben ist, damit zugleich die Zeit bekannt ist, in welcher der Comet vom Zustande der Ruhe ausgehend in die Sonne fällt.

§ 190. **Aufgabe 38.** Gegeben ist die Entfernung von der Sonne in dem Moment, wo der Comet sich in Ruhe befindet; man soll die Zeit finden, in welcher er zur Sonne gelangt.

**Lösung:** Es sei  $D$  jene Distanz; dann wird dies die Länge der grossen Axe einer Ellipse sein, deren Umlaufszeit doppelt so gross ist als die gesuchte Zeit. Da nun die Umlaufszeit nach § 71 gleich

$$\frac{\pi}{m} \left(\frac{1}{2} D\right)^{\frac{3}{2}}$$

ist, so wird die Zeit des elliptischen Falles in die Sonne gleich

$$t = \frac{\pi}{m} \frac{D^{\frac{3}{2}}}{4\sqrt{2}}.$$

[114] § 191. **Zusatz.** Da die Zeit des parabolischen Falles nach § 103 gleich

$$\frac{1}{m} \frac{D^{\frac{3}{2}}}{3\sqrt{2}}$$

ist, so verhält sich die parabolische zur elliptischen Zeit wie 4 zu  $3\pi$  oder nahe wie 14 zu 33 oder 73 zu 172.

§ 192. **Anmerkung.** Wenn wir für  $D$  die mittleren Distanzen der Planeten annehmen, so wird die Zeit ihres elliptischen Falles in die Sonne:

♃	1902.60 Tage
♄	764.38 »
♅	121.42 »
♆	64.57 »
♇	39.70 »
♈	15.55 »

§ 193. **Aufgabe 39.** (Fig. 12.) *Man ermittle die Geschwindigkeit eines in einer Ellipse sich bewegenden Cometen.*

**Lösung:** Es sei  $AM$  ein elliptischer Bogen,  $A$  der Scheitel,

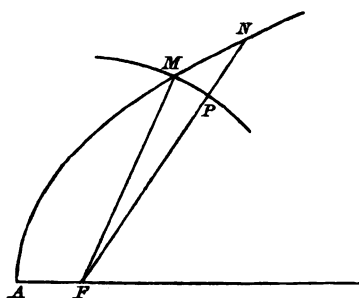


Fig. 12.

$AF = f$  seine Distanz vom Brennpunkte oder vom Centrum der Sonne; die grosse Axe sei  $a$ , die Strecke  $FM = z$ , der Bogen  $MN$  unendlich klein,  $MP$  ein um die Sonne concentrischer Kreisbogen. Die Zeit, in welcher  $MN$  durchlaufen wird, sei  $T$  und die, in welcher  $MP$  durchlaufen [115] wird, sei  $t$ . Da der Halbparameter der Ellipse

$$\frac{2(af - f^2)}{a}$$

ist, so wird nach Gesetz 4 (§ 69)

$$T = \frac{MFN \sqrt{a}}{m \sqrt{2af - 2f^2}}$$

$$t = \frac{MFP}{m \sqrt{z}}$$

Nennen wir die Geschwindigkeiten in  $MN = C$  und in  $MP = c$ , so wird

$$C = \frac{MN}{T}$$

$$c = \frac{MP}{t}$$

und daher

$$C:c = \frac{m \cdot MN \cdot \sqrt{2(af - f^2)}}{MFN \cdot \sqrt{a}} : \frac{MP \cdot m \sqrt{z}}{MFP}$$

oder

$$C:c = MN \sqrt{2(af - f^2)} : MP \sqrt{za}.$$

Es ist aber

$$\frac{MP}{MN} = \sin MNP = \frac{\sqrt{af - f^2}}{\sqrt{az - z^2}} \quad (\S 173),$$

also nach durchgeführter Substitution:

$$C:c = \sqrt{2(ax - x^2)} : \sqrt{za}.$$

Nun ist nach § 75 die Geschwindigkeit auf dem Kreise:

$$c = \frac{2m}{\sqrt{z}},$$

also wird

$$C = \frac{2m \sqrt{2(ax - x^2)}}{z \sqrt{a}}.$$

Dies ist die Strecke, welche in der Richtung der Tangente in einem mittleren Sonnentage durchlaufen wird.

§ 194. **Zusatz.** Da die eben ermittelte Formel nur die grosse Axe und die Distanz  $FM$  enthält, so ist klar, dass die [116] Geschwindigkeit von der Lage des Brennpunktes in der grossen Axe unabhängig ist.

§ 195. **Lehrsatz 16<sup>a</sup>.** Wenn die Umlaufzeiten zweier oder mehrerer in Ellipsen wandelnder Cometen gleich sind, so ist die Geschwindigkeit derselben in derselben Distanz von der Sonne gleich.

Beweis: Wenn nämlich die Umlaufzeiten gleich sind, so sind auch die grossen Axen gleich (§ 71); da nun die Geschwindigkeit in der elliptischen Bewegung allgemein gleich

$$C = \frac{2\sqrt{2}m\sqrt{ax - x^2}}{x\sqrt{a}}$$

ist, und die grossen Axen und die Distanzen bei allen dieselben sind, so sind es auch die Geschwindigkeiten.

§ 196. **Lehrsatz 17.** (Fig. 23.) Wenn ein in einer Ellipse wandelnder Comet den beliebigen Bogen NM durchläuft und

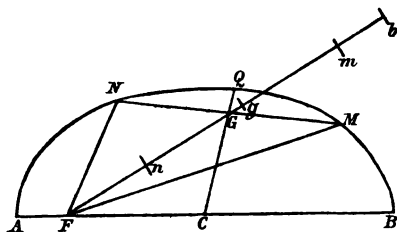


Fig. 23.

man halbiert die Sehne NM in G, zieht aus dem Centrum C den Halbmesser CGQ und aus dem Brennpunkte F eine der grossen Axe AB gleiche Gerade Fb; macht ferner auf dieser letzteren  $Fg = \frac{1}{2}(FN + FM)$  und  $gn = gm = GN$ , so wird, wenn

der Comet im Punkte b von der Ruhe ausgehend gegen die Sonne fällt, die Zeit, in welcher er den Abschnitt mn durchmisst, gleich der Zeit, in welcher er den Bogen NM zurücklegt.

Beweis: Die Gerade Fb kann als eine Ellipse betrachtet werden, deren Scheitel mit dem Brennpunkte in F zusammen[117] fällt; wegen  $Fb = AB$  wird die Zeit, in welcher er dieselbe durchläuft, gleich der Umlaufzeit der Ellipse AQB (§ 71). Ferner ist die Summe der Radienvectoren  $Fn + Fm = FN + FM$  und die durchlaufene Sehne  $nm = NM$ ; nach Aufgabe 37 (§ 185) werden also beide Sehnen in derselben Zeit durchlaufen.

§ 197. **Zusatz.** Es kann daher die Zeit, in welcher ein beliebiger elliptischer Bogen durchlaufen wird, durch den »elliptischen Fall des Cometen in die Sonne« bestimmt werden.

§ 198. **Definition 5.** Die Scala der elliptischen Geschwindigkeiten ist eine geradlinige Theilung, auf welcher für jede beliebige

*Distanz von der Sonne die Geschwindigkeit eines in elliptischer Bahn sich bewegenden Cometen entnommen werden kann.*

§ 199. **Zusatz.** Da die elliptische Geschwindigkeit von der grossen Axe abhängt, so ist die Folge, dass die Scala dieselbe bleibt, wenn die grosse Axe festgehalten wird; für jede andere grosse Axe aber muss die Scala geändert werden.

§ 200. **Lehrsatz 18.** (Fig. 13.) *Bezeichnet  $F$  das Centrum der Sonne, in welches der Comet vom Zustand der Ruhe in  $A$  ausgehend fällt und wird zu jedem beliebigen Punkte  $M$  die Zeit hinzugeschrieben, welche der Comet entweder von  $A$  nach  $M$  oder von  $M$  nach  $F$  braucht, so stellt die auf diese Weise getheilte Gerade  $AF$  die Scala der Geschwindigkeiten dar für alle Ellipsen, deren grosse Axe gleich  $AF$  ist.*

[118] **Beweis:** Es wird nämlich dadurch die Zeit gegeben, in welcher die kleine Strecke  $Mm$  durchfallen wird. Theilt man aber diese Strecke durch die Zeit, so hat man die Geschwindigkeit in  $M$ . Da jede grosse Axe eine andere Scala der Geschwindigkeiten erfordert (§ 199) und da die Gerade  $AF$  eine Ellipse vorstellt, deren Brennpunkt und Scheitel  $F$  und deren grosse Axe  $AF$  ist (§ 197), so kann die Scala nur für Ellipsen dienen, deren grosse Axe  $= AF$  ist.

§ 201. **Lehrsatz 19.** (Fig. 24.) *Sei  $A$  das Centrum der Sonne und der Comet falle von der Ruhe in  $B$  ausgehend nach  $A$ ; man beschreibe ferner über  $AB$  als Durchmesser einen Halbkreis, nehme die beliebige Abscisse  $AP$ , die zugehörige Ordinate  $PM$  und ziehe  $AM$ , dann verhält sich die Zeit des ganzen Falles durch  $BA$  zur Zeit des Falles durch  $BP$ , wie die Fläche des Halbkreises  $AMB$  zur Fläche des Segmentes  $AMB$ .*

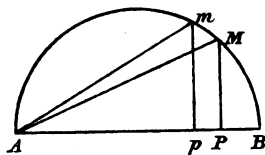


Fig. 24.

**Erster Beweis:** Die Gerade  $AB$  ist nämlich eine Ellipse ohne Breite und die Flächen, welche der Radiusvector überstreicht und welchen nach dem bekanntesten Satz der Astronomie die Zeiten gleich sind, werden daher bequemer und wohl nothwendig durch die Flächen des Halbkreises über  $AB$  ersetzt. Es ist aber der Brennpunkt in  $A$  und  $AM$  tritt an Stelle des Radiusvectors; die Zeiten werden sich daher verhalten wie die Flächen, die er überstreicht. Daher verhält sich die Zeit des ganzen Falles zur Zeit des Falles durch  $BP$ , wie die Fläche des Halbkreises zur Fläche des Sectors  $MAB$ .

[119] Zweiter Beweis: Es sei  $AB = a$ ,  $AP = z$ ,  $Pp = -dz$  und die Zeit, in der  $Pp$  durchfallen wird,  $d\tau$ ; dann ist die Geschwindigkeit in  $P$  gleich  $-\frac{dz}{d\tau}$ . Wir sahen aber, dass diese ist: (§ 193)

$$-\frac{dz}{d\tau} = \frac{2\sqrt{2}m\sqrt{ax - z^2}}{z\sqrt{a}}$$

oder

$$-\frac{2\sqrt{2}m d\tau}{\sqrt{a}} = \frac{z dz}{\sqrt{ax - z^2}}$$

oder

$$-\frac{2\sqrt{2}m}{\sqrt{a}} \tau = \int \frac{z dz}{\sqrt{ax - z^2}}.$$

Es ist aber  $\frac{ax dz}{4\sqrt{ax - z^2}}$  gleich dem Elementarsector  $AmM$  und daher

$$\frac{1}{2} \tau m \sqrt{2a} = MAB$$

$$\tau = \frac{2 MAB}{m\sqrt{2a}} = \frac{2n \cdot MAB}{\sqrt{2a}}.$$

Fig. 25.

§ 202. **Anmerkung 1.** Diese Formel giebt die Zeit in mittleren Sonnentagen; dieselbe hängt, wie man sieht, von der Länge der grossen Axe  $AB$  ab. Wenn man aber allgemein die Umlaufszeit einer Ellipse in 100 gleiche Theile theilt und die grosse Axe in 10000, so kann man eine Tafel des elliptischen Falles berechnen, (siehe Tafel II am Schluss), deren Gebrauch allgemeiner ist. Diese Tafel kann man nach Lehr-[120] satz 18 (§ 200) auch benutzen, um Scalen elliptischer Geschwindigkeiten zu construiren. Eine solche stellt Fig. 25 vor. Die eingeschriebenen Zahlen sind die Zeiten, in welchen der Comet im elliptischen Falle von einem beliebigen gegebenen Orte aus in die Sonne gelangt, wenn der Fall in  $B$  seinen Anfang nimmt und die ganze Zeit in 50 gleiche Theile getheilt wird.

§ 203. **Anmerkung 2.** (Fig. 23 Seite 96.) Wenn die Gerade  $Fb = AB$  (§ 196) auf diese Weise getheilt wird, dann wird

die Differenz der den Punkten  $n$  und  $m$  beigeschriebenen Zeiten die Zeit sein, in welcher die Strecke  $nm$  und daher auch der Bogen  $NM$  durchlaufen wird. Der Gebrauch der elliptischen Scala ist also derselbe wie der der parabolischen, den wir oben auseinandersetzen. Sobald die grosse Axe gegeben ist, ist auch die Scala der Geschwindigkeiten gegeben und es genügt dann die Länge der Sehne des durchlaufenen Bogens und die Summe der äusseren Radienvectoren  $FN + FM$ , um die Zeit zu bestimmen.

§ 204. **Aufgabe 40.** (Fig. 21, Seite 86.) *Gegeben ist die Länge der grossen Axe, die Lage des Brennpunktes und die Lage der beiden Punkte  $N$  und  $M$ ; man soll die Ellipse construiren.*

**Lösung:** Man ziehe die beiden Radienvectoren  $FM$  und  $FN$  von der grossen Axe ab, dann sind die Differenzen oder Reste nach der Natur der Ellipse gleich den Abständen der Punkte  $M$  und  $N$  vom anderen Brennpunkte  $f$ ; da die Punkte aber ihrer Lage nach gegeben sind, so kann auch der Brennpunkt  $f$  ohne Schwierigkeit gefunden werden. Dann wird die [121] Gerade  $Ff$  in  $C$  halbart und die halbe Länge der grossen Axe von  $C$  aus nach  $A$  und  $B$  abgetragen; dann ist  $AB$  Lage und Länge der grossen Axe. Die übrige Construction kann dann sehr leicht erledigt werden.

§ 205. **Anmerkung.** Es ist klar, dass die Bestimmung von  $f$  zweideutig ist, dass daher anderweitig festgesetzt werden muss, welche von beiden zu wählen ist.

§ 206. **Lehrsatz 20.** (Fig. 15.) *Wenn ein Comet, dessen Umlaufszeit bekannt ist, von der Erde aus in beiden Knoten beobachtet wird, so ist hierdurch die Lage und Länge der Knotenlinie und die Lage der grossen Axe und überhaupt die ganze Bahn bestimmt, nur die Neigung der Bahnebene bleibt unbestimmt.*

**Beweis:** Sei  $NAN'$  ein Theil der Ellipse,  $F$  ihr Brennpunkt oder das Centrum der Sonne,  $EE'$  die Bahn der Erde und zugleich ihre Oerter zur Zeit der beiden Beobachtungen. Die Lagen der Geraden  $EN$  und  $E'N'$  sind durch die geocentrischen Längen gegeben und  $NFN'$  ist die Knotenlinie. Da nun die Umlaufszeit und damit die grosse Axe gegeben ist, so kann die Scala der Geschwindigkeiten construirt werden. Auf dieser zähle man von der Sonne aus die Zeit ab, die zwischen der ersten und zweiten Beobachtung liegt und nehme die entsprechende Distanz, so wird dies die Länge  $NN'$  der





die doppelte Lage der Bahn (§ 205) hier keinerlei Schwierigkeit, weil ja mit Zuhilfenahme einer dritten Beobachtung die richtige Lage der Bahn zugleich mit dem Neigungswinkel bestimmt wird.

§ 208. *Lehrsatz 21. Wenn die Umlaufszeit eines Cometen bekannt ist und ausserdem drei geocentrische Oerter mit den Beobachtungszeiten, so kann dadurch die Grösse und Lage der Bahn bestimmt werden.*

[123] Beweis: Durch die Umlaufszeit ist nämlich die grosse Axe und damit die Scala der Geschwindigkeiten gegeben (§ 71, 200 ff.). Da der Gebrauch derselben genau derselbe ist, wie der der parabolischen Scala, so kann die Construction der Bahn ebenso absolvirt werden, wie bei der Parabel, die wir in der zweiten Lösung der Aufgabe 31 (§ 155) gegeben haben. Es wird nämlich zuerst der wahre Ort zweier Cometenpositionen bestimmt und dann mit Hülfe der dritten Beobachtung die Bahn nach Aufgabe 40 (§ 204) construirt.

§ 209. *Anmerkung.* Ich übersehe nicht, dass die Umlaufszeit, welche in diesem Satze als gegeben angenommen wurde, eigentlich fehlen könnte, da doch drei geocentrische Cometenörter genügen müssen. Damit es nun nicht scheine, als ob ich ohne Grund die Zahl der Daten vermehrt hätte, will ich folgendes bemerken. Zunächst steht fest, dass es eine allgemeine Eigenschaft der Cometenbahnen ist, dass der Bogen, welcher während der Sichtbarkeitsdauer durchlaufen wird, nur ein kleiner Theil der ganzen Ellipse ist. Daher kann man von den sechs Bahnelementen (§ 141, 142) die grosse Axe aus sich so nahe liegenden Oertern nicht mit Sicherheit ableiten, da auch der kleinste kaum vermeidliche Beobachtungsfehler einen sehr merklichen Unterschied erzeugen würde. Man muss hier auch der *Aberration des Lichtes* gedenken, welche die Beobachtungen mehr oder weniger unsicher macht und deren Effect man nicht berücksichtigen kann, wenn die Cometenbahn [124] nicht schon nahe bekannt ist. Wenn aber die Bahn schon nahe bekannt ist, so trifft es sich zuweilen, dass aus den übrigen Bahnelementen erkannt wird, dass der Comet bereits in früheren Zeiten beobachtet worden ist, und daraus kann dann die Umlaufszeit geschlossen werden, zumal wenn er schon mehrere Male beobachtet worden ist. Ist aber die Umlaufszeit gegeben, so wird dadurch die Bahnbestimmung in allen Fällen sehr erleichtert, weil man nun die Scala der



Entwickelt man in Reihen und integrirt, so kommt:

$$2\sqrt{2}mt = \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{z^{\frac{5}{2}}}{a} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{7} \frac{z^{\frac{7}{2}}}{a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{2}{9} \frac{z^{\frac{9}{2}}}{a^3} + \dots$$

$$2\sqrt{2}m\tau = \frac{2}{3}\zeta^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{\zeta^{\frac{5}{2}}}{a} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{2}{7} \frac{\zeta^{\frac{7}{2}}}{a^2} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{2}{9} \frac{\zeta^{\frac{9}{2}}}{a^3} + \dots$$

und daher

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(z^{\frac{3}{2}} - \zeta^{\frac{3}{2}}) + \frac{n}{10a\sqrt{2}}(z^{\frac{5}{2}} - \zeta^{\frac{5}{2}}) + \frac{3n}{56a^2\sqrt{2}}(z^{\frac{7}{2}} - \zeta^{\frac{7}{2}}) \\ + \frac{5n}{144a^3\sqrt{2}}(z^{\frac{9}{2}} - \zeta^{\frac{9}{2}}) + \dots$$

[126] § 211. **Zusatz 1.** Wenn die grosse Axe unendlich gross ist, die Ellipse also in eine Parabel übergeht, dann erhält man kurz

$$T = \frac{n}{3\sqrt{2}}(z^{\frac{3}{2}} - \zeta^{\frac{3}{2}})$$

wie schon früher bei der dritten Lösung der Aufgabe 15 (§ 83).

§ 212. **Zusatz 2.** Es ist jetzt auch ersichtlich, was man der Zeit, die nach der Hypothese der Parabel berechnet ist, hinzufügen muss, um die Zeit zu erhalten, in welcher der elliptische Bogen durchlaufen wird. Der erste Term der erhaltenen Reihe ist nämlich von der Axe der Ellipse unabhängig und dient, allein gebraucht, für die Parabel.

§ 213. **Zusatz 3.** Ist  $FB$  die Axe der Hyperbel, so wird die Zeit des hyperbolischen Falles der Cometen von  $m$  nach  $F$  nach § 210

$$t = \frac{n}{2\sqrt{2}} \left( \frac{2}{3}z^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \frac{z^{\frac{5}{2}}}{a} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{2}{7} \frac{z^{\frac{7}{2}}}{a^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{2}{9} \frac{z^{\frac{9}{2}}}{a^3} + \dots \right).$$

Hieraus kann leicht die Scala der hyperbolischen Geschwindigkeiten construiert werden, ähnlich wie bei der Ellipse und Parabel.

[127] § 214. **Lehrsatz 22.** (Fig. 26.) Wird um die grosse Axe der Ellipse  $AB$  der Halbkreis  $AqB$  geschlagen, die Sehne  $NM$  parallel zur Axe  $AB$  gezogen, und die Ordinaten  $PNn$ ,  $RMm$  errichtet, so werden, wenn für die Ellipse die Sonne im Brennpunkte  $F$ , für den Kreis aber im Centrum  $C$  sich befindet, die Bogen  $NQM$  und  $nqm$  in derselben Zeit durchlaufen.



*beliebigen Bogen NM ersetzt werden durch die Bewegung in einer andern Ellipse nQm von gleicher Umlaufszeit, und zwar so, dass er in dieser letzteren in derselben Zeit die Bogen nQ und mQ durchläuft, welche auf beiden Seiten des Scheitels Q gleich gross sind.*

Beweis: Man halbire die Sehne NM in G, nehme die halbe Summe der Radienvectoren  $\frac{FN + FM}{2}$ , und construire das rechtwinklige Dreieck FEm, so dass

$$Fm = \frac{FN + FM}{2}$$

$$Em = \frac{1}{2} NM$$

wird. Nimmt man dann die Differenz zwischen Fm und der Axe AB und schneidet mit derselben von m aus auf EF in  $\varphi$  ein, so ist damit der zweite Brennpunkt der gesuchten Ellipse gefunden. Wird daher  $\varphi F$  in c halbt und  $cQ = cb = AC$  gemacht, so wird Qb die grosse Axe. Mit ihr und dem Brennpunkte F kann die Ellipse construirt werden und es ist dann mQn der gesuchte Bogen (§ 183).

**Tafel I. Zur Berechnung des parabolischen Falles  
in die Sonne. (§ 115.)**

Zeit	Dist. ☉	Zeit	Dist. ☉
0 <sup>d</sup> 0 <sup>h</sup>	0.00000	4 <sup>d</sup> 0 <sup>h</sup>	0.27722
3	02750	6	28866
6	04366	12	29987
9	05721	18	31088
0 12	0.06930	5 0	0.32169
15	08042	6	33233
18	09082	12	34279
21	10064	18	35311
1 0	0.11002	6 0	0.36327
3	11900	6	37326
6	12766	12	38318
9	13604	18	39294
1 12	0.14416	7 0	0.40258
15	15206	6	41211
18	15976	12	42153
21	16728	18	43085
2 0	0.17464	8 0	0.44006
3	18184	6	44919
6	18891	12	45822
9	19584	18	46712
2 12	0.20265	9 0	0.47601
15	20935	6	48479
18	21595	12	49348
21	22244	18	50211
3 0	0.22884	10 0	0.51065
3	23516	12	52753
6	24139	11 0	54415
9	24754	12	56052
3 12	0.25360	12 0	0.57665
15	25961	12	59256
18	26055	13 0	60826
21	27142	14 0	63906
4 0	0.27722	15 0	0.66914

Zeit	Dist. ☉	Zeit	Dist. ☉	Zeit	Dist. ☉
15 <sup>d</sup>	0.66914	45 <sup>d</sup>	1.39188	75 <sup>d</sup>	1.95659
16	69856	46	41243	76	97394
17	72737	47	43282	77	1.99122
18	75563	48	45307	78	2.00843
19	78336	49	47318	79	02555
20	0.81061	50	1.49315	80	2.04261
21	83741	51	51300	81	05960
22	86379	52	53272	82	07651
23	88977	53	55230	83	09336
24	91538	54	57176	84	11014
25	0.94063	55	1.59111	85	2.12685
26	96555	56	61034	86	14350
27	0.99015	57	62945	87	16009
28	1.01442	58	64845	88	17661
29	03846	59	66735	89	19307
30	1.06220	60	1.68614	90	2.20946
31	08567	61	70482	91	22580
32	10890	62	72340	92	24208
33	13188	63	74188	93	25829
34	15463	64	76026	94	27445
35	1.17717	65	1.77855	95	2.29056
36	19948	66	79675	96	30660
37	22159	67	81485	97	32260
38	24351	68	83287	98	33853
39	26523	69	85080	99	35441
40	1.28676	70	1.86863	100	2.37024
41	30812	71	88639		
42	32931	72	90406		
43	35032	73	92165		
44	37118	74	93916		
45	1.39188	75	1.95659		



Tafel II. Zur Berechnung des elliptischen Falles. (§ 202.)

Zeit	Dist. ☉	Zeit	Dist. ☉	Zeit	Dist. ☉
0	0	17	7008	34	9355
1	1270	18	7209	35	9434
2	1984	19	7399	36	9508
3	2562	20	7580	37	9577
4	3062	21	7753	38	9642
5	3513	22	7918	39	9699
6	3921	23	8075	40	9751
7	4298	24	8226	41	9799
8	4647	25	8368	42	9842
9	4973	26	8503	43	9880
10	5279	27	8631	44	9912
11	5567	28	8753	45	9939
12	5840	29	8869	46	9961
13	6100	30	8978	47	9978
14	6343	31	9081	48	9990
15	6575	32	9178	49	9998
16	6797	33	9269	50	10000
17	7008	34	9355		



## II.

### Bemerkungen über die scheinbare Bahn der Cometen.

(Observations sur l'orbite apparente des Comètes,  
Nouveaux Mémoires de l'Académie de Berlin Année 1771.)

[352] § 1. Die Astronomen haben bis jetzt mehr Gewicht darauf gelegt, die wahren Bahnen der Cometen zu ermitteln, als die Erscheinungen zu bestimmen, welche man daraus für ihre scheinbaren Bahnen ableiten kann. Man kann zwar, wenn die wahre Bahn bekannt ist, daraus die scheinbare Bewegung sehr leicht ableiten, ja sogar voraussagen, aber man macht dies immer nur für bestimmte Fälle und eine allgemeine Theorie ist daher nicht ausgebildet worden. Man begnügt sich zu wissen, dass drei Beobachtungen zur Berechnung der wahren Bahn nöthig sind, und man hat dafür mehrere Methoden vorgeschlagen, welche alle schliesslich auf Versuche und Annäherungen hinauslaufen. Das ist eine lange Arbeit und daher verdient Alles Aufmerksamkeit, was sie abkürzen kann. In dieser Absicht möchte ich eine allgemeine Theorie der scheinbaren Bahnen vorschlagen und um nicht blos beim Vorschlag zu bleiben, gebe ich hier eine Probe, aus der man wohl ersehen wird, dass es sich lohnt über diese Sache nachzudenken.

§ 2. Wenn die Erde und der Comet sich in geraden Linien mit gleichförmiger Geschwindigkeit bewegen würden, so wäre die scheinbare Bahn des Cometen eine sehr einfache und man brauchte keine Theorie; denn er würde einen grössten Kreis der Sphäre beschreiben. Zwei Beobachtungen würden genügen, um die Lage dieses grössten Kreises zu bestimmen und eine dritte wäre nöthig, um die Ungleichförmigkeit der scheinbaren Geschwindigkeit zu ermitteln und damit die ganze

scheinbare Bewegung des Cometen. Aber so liegt die Sache in Wirklichkeit nicht. Sehr selten liegen mehr als drei Punkte [353] der scheinbaren Bahn genau in einem grössten Kreise; also können weder die Erde noch der Comet sich in gerader Linie und mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegen.

§ 3. Wenn ein Comet sich genau in der Ebene der Ekliptik bewegen würde, so fände seine scheinbare Bewegung ebenfalls in der Ekliptik, also in einem grössten Kreise statt. Aber dieser Fall tritt nicht ein; wenigstens sind bis jetzt alle Cometen ober- oder unterhalb der Ekliptik gesehen worden oder sie haben dieselbe nur in einem Punkte geschnitten. Man weiss sogar, dass die meisten Cometenbahnen sehr starke Neigung haben. Wir können also auch von dem Falle absehen, wo der Comet sich in der Ebene der Erdbahn bewegt.

§ 4. Wenn wir nun auch die scheinbare Bewegung der Cometen in grössten Kreisen nicht zulassen können, so werden uns diese doch von Nutzen sein, indem sie uns als Vergleichsmittel dienen. Betrachten wir die scheinbare Bahn eines Cometen, nehmen darauf zwei Punkte und legen durch sie einen grössten Kreis. Ich behaupte, *wenn die zwischenliegenden Punkte der scheinbaren Bahn auf derselben Seite liegen, wie die zugehörigen Oerter der Sonne, dann ist der Comet weiter von der Sonne entfernt als die Erde und im entgegengesetzten Falle ist er näher.*

§ 5. Da ich hier vorläufig dieses Theorem nur anführe, um den Nutzen der scheinbaren Bahn erkennen zu lassen, so habe ich die näheren Bestimmungen nicht ausgesprochen. Denn es ist nicht gleichgültig, wie die Punkte  $A, B, C$  genommen werden; im Gegentheil, es ist angemessen, eine Wahl zu treffen. Aber all' das wird sich besser durch die Analyse zeigen, die mich auf dieses Theorem geführt hat und die ich jetzt auseinandersetzen will, zuerst im Allgemeinen und dann im Besonderen.

§ 6. (Fig. 27.) Sei  $S$  das Centrum der Sonne,  $MN$  ein Theil der Cometenbahn,  $Q$  ein zwischenliegender Punkt, der ungefähr in der Mitte liegt. Zieht man die Sehne  $MN$  und die Radienvectoren  $SM, SQ, SN$ , so behaupte ich erstens, dass die Zeiten, die der Comet braucht, um die Bogen  $MQ$  und  $QN$  zu durchlaufen, sehr nahe im Verhältniss der Stücke  $Mq$  und  $qN$  der Sehne  $MN$  stehen. Denn die Zeiten verhalten sich wie die Flächen der Sektoren  $MSQ$  und  $SQN$  und daher



scheinbare Bewegung des Cometen. Aber so liegt die Sache in Wirklichkeit nicht. Sehr selten liegen mehr als drei Punkte [353] der scheinbaren Bahn genau in einem grössten Kreise; also können weder die Erde noch der Comet sich in gerader Linie und mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegen.

§ 3. Wenn ein Comet sich genau in der Ebene der Ekliptik bewegen würde, so fände seine scheinbare Bewegung ebenfalls in der Ekliptik, also in einem grössten Kreise statt. Aber dieser Fall tritt nicht ein; wenigstens sind bis jetzt alle Cometen ober- oder unterhalb der Ekliptik gesehen worden oder sie haben dieselbe nur in einem Punkte geschnitten. Man weiss sogar, dass die meisten Cometenbahnen sehr starke Neigung haben. Wir können also auch von dem Falle absehen, wo der Comet sich in der Ebene der Erdbahn bewegt.

§ 4. Wenn wir nun auch die scheinbare Bewegung der Cometen in grössten Kreisen nicht zulassen können, so werden uns diese doch von Nutzen sein, indem sie uns als Vergleichsmittel dienen. Betrachten wir die scheinbare Bahn eines Cometen, nehmen darauf zwei Punkte und legen durch sie einen grössten Kreis. Ich behaupte, *wenn die zwischenliegenden Punkte der scheinbaren Bahn auf derselben Seite liegen, wie die zugehörigen Oerter der Sonne, dann ist der Comet weiter von der Sonne entfernt als die Erde und im entgegengesetzten Falle ist er näher.*

§ 5. Da ich hier vorläufig dieses Theorem nur anführe, um den Nutzen der scheinbaren Bahn erkennen zu lassen, so habe ich die näheren Bestimmungen nicht ausgesprochen. Denn es ist nicht gleichgültig, wie die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  genommen werden; im Gegentheil, es ist angemessen, eine Wahl zu treffen. Aber all' das wird sich besser durch die Analyse zeigen, die mich auf dieses Theorem geführt hat und die ich jetzt auseinandersetzen will, zuerst im Allgemeinen und dann im Besonderen.

§ 6. (Fig. 27.) Sei  $S$  das Centrum der Sonne,  $MN$  ein Theil der Cometenbahn,  $Q$  ein zwischenliegender Punkt, der ungefähr in der Mitte liegt. Zieht man die Sehne  $MN$  und die Radienvectoren  $SM$ ,  $SQ$ ,  $SN$ , so behaupte ich erstens, dass die Zeiten, die der Comet braucht, um die Bogen  $MQ$  und  $QN$  zu durchlaufen, sehr nahe im Verhältniss der Stücke  $Mq$  und  $qN$  der Sehne  $MN$  stehen. Denn die Zeiten verhalten sich wie die Flächen der Sektoren  $MSQ$  und  $SQN$  und daher



der Comet sich in den Punkten  $M, Q, N$  befindet, wenn die Erde in  $A, B, C$  ist. Wir setzen die Zeitintervalle noch als nahezu gleich voraus. Ziehen wir dann die Sehnen  $AC$  und  $MN$  und

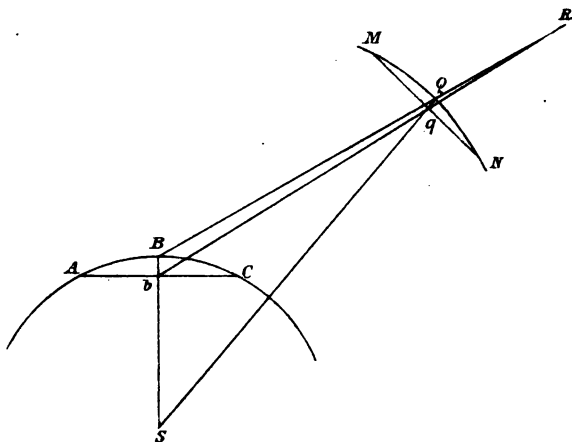


Fig. 28.

[355] die Radienvectoren  $SB$  und  $SQ$ , dann wird nach dem zweiten Satz (§ 7) sehr nahe sein:

$$Bb : \frac{1}{SB^2} = Qq : \frac{1}{SQ^2}$$

und dies giebt:

$$Bb : Qq = SQ^2 : SB^2.$$

§ 9. Nach dem ersten Satze (§ 6) hat man ebenso sehr nahe

$$Ab : bC = Mq : qN,$$

da diese Theile der Sehnen sich nahezu wie die Zwischenzeiten verhalten.

§ 10. Und daraus folgt nun, dass wir voraussetzen können, dass die Erde, statt den Bogen  $ABC$  zu durchlaufen, die Sehne  $AbC$  durchläuft und dass der Comet, statt den Bogen  $MQN$  zu durchlaufen, die Sehne  $MqN$  durchläuft, beide in gleichförmiger Geschwindigkeit, da die Zeitintervalle, nahe wenigstens, im Verhältniss der Strecken  $Ab : bC$  und  $Mq : qN$  stehen.

§ 11. In diesem Falle aber wird die scheinbare Bahn des Cometen ein grösster Kreis der Sphäre; und dieser grösste Kreis kann gezeichnet werden mit Hülfe der in  $A$  und  $C$  angestellten Beobachtungen. Diese beiden Punkte sind dem Bogen  $ABC$  und der Sehne  $AbC$  gemeinsam. Es wird also nur die in dem Zwischenpunkte  $B$  erhaltene Beobachtung von der Voraussetzung geradliniger Bahnen abweichen. Untersuchen wir, in welcher Weise.

§ 12. Offenbar sieht die Erde in  $B$  den Cometen in  $Q$  in der Richtung der Geraden  $BQ$ , und unter der Voraussetzung geradliniger Bahnen wird die Erde in  $b$  den Cometen in  $q$  in der Richtung der Geraden  $bq$  sehen. Wenn also die Geraden  $BQ$  und  $bq$  parallel zu einander sind, so wird der scheinbare Ort des Cometen in dem einen wie in dem anderen Falle derselbe sein. Im entgegengesetzten Falle werden sie sich von einander unterscheiden. Das wollen wir nun bestimmen.

§ 13. Zunächst sieht man, dass die Punkte  $b$  und  $q$ , da sie den Geraden  $SB$  bez.  $SQ$  angehören, in der Ebene des [356] Dreieckes  $BSQ$  liegen, welches auch die Lage der Cometenbahn sei. Nehmen wir also den Fall, wo die Geraden  $BQ$  und  $bq$  zu einander parallel sind, so werden wir haben:

$$Bb : Qq = SB : SQ.$$

Da aber nach dem zweiten Theorem (§ 7) allgemein

$$Bb : Qq = SQ^2 : SB^2$$

ist, so folgt:

$$SB : SQ = SQ^2 : SB^2$$

oder

$$SQ = SB.$$

Also: die Geraden  $BQ$  und  $bq$  sind nur dann zu einander parallel, wenn der Comet in  $Q$  eben so weit von der Sonne entfernt ist wie die Erde. Nur in diesem Falle auch kann der grösste Kreis, der durch die scheinbaren Oerter des Cometen zur Zeit der ersten und dritten Beobachtung hindurchgelegt wird, durch den scheinbaren Ort des Cometen zur Zeit der zweiten Beobachtung hindurchgehen.

§ 14. Nehmen wir weiter an:

$$SQ > SB,$$

dann sieht man nach dem zweiten Satze (§ 7), dass mit noch grösserem Rechte



$Qq$

Wenn man sich die Geraden  $BQ$  und  $bq$  um  $Q$  herum drehen lässt, kommt, und dies noch um so mehr, weil die Gerade  $SQ$  gegen die Gerade  $SB$  steht. Sie werden also einen Schnittpunkt jenseits des Cometen in  $Q$  liegt. Der Winkel  $SbR$  grösser ist, als der Winkel  $SBR$ . Es giebt sich, dass der scheinbare Ort des Cometen von der Erde in  $B$  weniger weit von der Richtung der Geraden  $bq$  sähe. Der Maass der Differenz.

Setzen wir allgemein

$$Bb = \frac{n}{SB^2}$$

$$Qq = \frac{n}{SQ^2}$$

$$\sin SQB : \sin SBQ = \frac{n}{SB^2} : \frac{n}{SQ^2}$$

$$\sin SBQ = SB : SQ,$$

$$SB = \frac{n}{SQ^2} SB : \frac{n}{SB^2} SQ$$

$$RB = SB^3 : SQ^3.$$

Im Dreiecke  $BRb$  kennt man den Winkel  $SBR$ , und den Winkel  $BRb$ , welcher die Differenz der beiden Beobachtung, zwischen der scheinbaren und dem grössten Kreise, der durch die Cometen, gesehen von  $A$  und  $C$  aus, hin- und her gehen. Das Dreieck  $BRb$  ist also nach Grösse, Lage und Winkel gegeben. Da man also die Gerade  $BR$ , und die Gerade  $SB$  kennt, so ist die ganze Linie  $BS$  bekannt. Man führt, auf der Geraden  $BR$  einen Punkt  $Q$  an, so dass

$$QR : BR = BS^3 : OS^3$$

wird. Man sieht daraus, dass die geocentrische Distanz des Cometen  $BQ$  bestimmt ist, wenigstens insofern, als es unsere nur genähert richtigen zwei Theoreme (§ 6, 7) zulassen. Man sieht auch, dass diese Formeln allgemein sind, wie auch die Distanz sei. Es muss aber doch ein Wort gesagt werden über den Fall, wo diese Distanz kleiner ist als  $SB$ .

[358] § 17. Nehmen wir

$$SQ < SB,$$

so wird der Punkt  $R$ , der im vorigen Falle jenseits des Cometen lag, nun diesseits der Erde gegen  $A$  fallen. Denn hier ist  $Qq > Bb$  und die Gerade  $SQ$  ist weniger gegen die Gerade  $BQ$  geneigt als  $SB$ . Die Geraden  $BQ$  und  $bq$  entfernen sich also bei der Annäherung an  $Qq$  von einander. Daraus folgt, dass der Winkel  $SBQ$  grösser wird als der Winkel  $Sbq$  und dass folglich der scheinbare Ort des Cometen, gesehen in der Richtung  $BQ$  von der Sonne entfernter erscheinen wird, als wenn man ihn in der Richtung  $bq$  im Falle geradliniger Bahnen sähe.

§ 18. Diese Resultate können uns nun von den verschiedenen Wendepunkten Rechenschaft geben, die man in der Curve der scheinbaren Bahn wahrnimmt. Das einfachste Mittel, diese zu erkennen, ist, diese Bahn [auf eine Ebene] zu projectiren, indem man das Auge in den Mittelpunkt der Erde versetzt. Denn alle grössten Kreise der Sphäre werden dann durch gerade Linien repräsentirt und umgekehrt jede Gerade repräsentirt einen grössten Kreis an der Sphäre. Die scheinbare Bahn wird durch eine gekrümmte Linie dargestellt, welche einen Wendepunkt gerade da haben wird, wo der scheinbare Ort des Cometen einer heliocentrischen Distanz zugehört, die gleich der Entfernung der Erde von der Sonne ist. Denn in allen Punkten, welche einer grösseren heliocentrischen Distanz entsprechen, wendet die Curve ihre convexe Seite gegen den Punkt der Ekliptik, wo der entsprechende Ort der Sonne ist; und für jede heliocentrische Distanz, die kleiner ist, wenden sie ihre concave Seite gegen die Sonne. Das ist immer so, ausser wenn der Ort der Sonne in der Tangente liegt, die im entsprechenden Cometenort gezogen wird; denn dann hat die Curve auch dort einen Wendepunkt, weil die convexe Seite zur concaven wird. Zuletzt möchte ich noch bemerken, dass diese Curven sehr genau gezeichnet [359] werden müssen, weil häufig ihre Krümmung sehr klein



so findet man den Winkel  $bSB$  und die Hypotenuse  $Sb$  durch die Formeln

$$\cotg bSB = \cotg Bb \sin BS$$

$$\cos bS = \cos Bb \cos BS.$$

[360] § 21. Endlich kennt man im Dreieck  $EdS$  die Seite  $ES$  und die Winkel  $dSE$  und  $dES$  und findet daher die Seite  $Sd$  durch die Formeln:

$$\tan \frac{ED - DS}{2} = \frac{\tan \frac{1}{2} ES \sin(dSE - dES)}{\sin(dSE + dES)}$$

$$\frac{1}{2} ES - \frac{1}{2} (ED - DS) = DS$$

$$\cotg dS = \cos dSD \cotg DS.$$

§ 22. Wenn man also findet, dass der Bogen  $Sd$  grösser ist als der Bogen  $Sb$ , so wird man schliessen, dass der in  $b$  gesehene Comet näher an der Sonne ist als die Erde. Dagegen wird er entfernter sein, wenn man den Bogen  $Sd$  kleiner findet als den Bogen  $Sb$ . Wir bemerken noch, dass die Differenz beider Bogen, nämlich  $bd$ , das Maass für den Winkel  $BRb$  der Figur 28 ist. Man sieht also, wie dieser Winkel gefunden werden kann.

§ 23. Da alle Folgerungen, welche wir eben aus unseren zwei Sätzen gezogen haben, unter den »sehr nahe«, welche wir zugelassen haben, zu leiden haben könnten, so müssen wir darüber einige Bemerkungen machen. Die erste ist, dass, wenn man den Bogen  $bd$  sehr klein findet, obwohl der Bogen  $AC$  15, 20 oder mehr Grad beträgt, man im Allgemeinen schliessen wird, dass die heliocentrische Entfernung des Cometen zur Zeit, wo er sich in  $b$  befindet, sehr nahe gleich der heliocentrischen Entfernung der Erde ist; aber man wird nicht mit Sicherheit schliessen, ob sie ein wenig grösser oder kleiner ist. Das hängt in diesem Falle von der Wahl der zwischenliegenden Beobachtung in  $b$  ab.

§ 24. Ferner ist die Differenz  $bd$ , für ein gleiches Zeitintervall, um so beträchtlicher, je näher der Comet an der Sonne ist, weil dann seine Bahn eine grössere Krümmung besitzt. Wenn der Comet näher an der Erde ist, so trägt dies auch dazu bei, den Bogen  $bd$  oder den Winkel  $BRb$  (Fig. 28) zu vergrössern, der in Hinsicht auf die beiden Punkte  $B$  und  $b$  eine Art parallaktischer Winkel ist. Es giebt jedoch in dieser Hinsicht ein *Maximum*. Denn man sieht leicht,

dass, wenn alle anderen Umstände dieselben bleiben, der Winkel  $bRB$  gleich Null wird, wenn entweder der Winkel [361]  $BSQ$  gleich 0 oder gleich  $180^\circ$  wird. Nimmt man den Winkel  $BRb$  als sehr klein an, so findet man, dass er für dieselben Distanzen  $SB$  und  $SQ$  ein Maximum wird, wenn

$$\text{tang } BSQ = \frac{SQ^2 - SB^2}{2SQ \cdot SB},$$

weil sich dann die Punkte  $B, b, Q$  auf der Peripherie eines Kreises befinden müssen, dessen Mittelpunkt auf der Geraden  $SQ$  liegt, oder was auf dasselbe hinauskommt, weil die Punkte  $B, b, R$  sich auf der Peripherie eines Kreises befinden, dessen Mittelpunkt auf der Geraden liegt, welche durch  $R$  geht und parallel zu  $SQ$  ist. Aber man sieht, dass diese Umstände nicht ausgewählt werden können, weil man die Cometen nehmen muss, wie sie sich zeigen.

§ 25. Wir machen noch einige Anmerkungen, wie man die Wahl des Punktes  $Q$  treffen muss. Diese Wahl wäre sehr leicht, wenn dieser Punkt das Perihel des Cometen wäre. Aber

dieser günstige Umstand kommt nicht vor und kann auch nicht im voraus erkannt werden. Sei also (Fig. 30)  $S$  das Centrum der Sonne,  $A$  das Perihel der Cometenbahn, die ich als parabolisch voraussetze.  $MN$  sei ein beliebiger Bogen. Theilen wir die Sehne  $MN$  in zwei gleiche Theile  $MG$  und  $GN$  und ziehen durch  $G$  die Parallele  $GQ$  zur Axe.

Dann ist das Dreieck  $MGS$

gleich dem Dreieck  $NGS$  und das Segment  $MQG$  gleich dem Segment  $NQG$ , also:

$$SMQGS = SGQNS.$$

Dann ziehe man den Radiusvector  $Sh$  so, dass das gemischtlinige Dreieck  $QGg$  gleich wird dem Sector  $hSg$  und man wird haben

$$SMhS = SNhS.$$

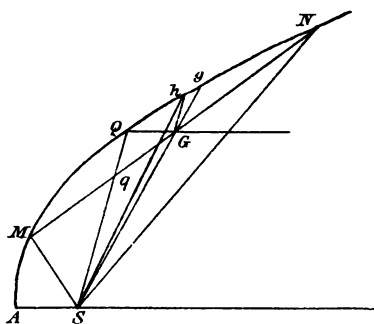


Fig. 30.

Ist nun der Bogen  $MN$  nicht sehr gross, so wird  $Qg$  als Gerade betrachtet werden dürfen und man bekommt:

$$Sg : Qg = Gg : gh$$

$$gh = \frac{Qg \cdot Gg}{Sg}.$$

[362] Daraus sieht man, dass  $gh$  eine sehr kleine Grösse ist und dass  $Gh$  sehr nahezu parallel zu  $SQ$  sein wird.

§ 26. Es sei  $T$  die Zeit, welche der Comet braucht, um den Bogen  $MN$  zu durchlaufen. Dann habe ich in der Abhandlung: *Insigniores orbitae cometarum proprietates*, erschienen 1761, gezeigt, dass

$$SQ = \frac{mT}{\sqrt{2GQ}} - \frac{1}{3}GQ = \frac{SM + SN}{2} - GQ.$$

In dieser Formel ist die mittlere Distanz der Erde von der Sonne gleich 1 gesetzt und

$$\frac{1}{m} = 116.2648$$

$$m = 0.008\,601\,059.$$

Es folgt also:

$$QG = qQ = \frac{m^2 T^2}{2(SQ + \frac{1}{3}QG)^2}$$

oder auch

$$qQ = \frac{m^2 T^2}{2(Sg - \frac{2}{3}QG)^2}.$$

Also ist

$$qQ < \frac{m^2 T^2}{2SQ^2}$$

und

$$qQ > \frac{m^2 T^2}{2Sg^2}.$$

Nun ist

$$qQ > gG;$$

wenn man also

$$gG = \frac{m^2 T^2}{2Sg^2}$$

macht, so wird diese Formel noch genauer sein. Ich schliesse daraus, dass man im Allgemeinen gut thun wird, drei Beobachtungen zu wählen, welche um dasselbe Zeitintervall von einander abstehen. Und dieses Intervall muss noch so klein sein, dass der Winkel  $MSN$  20 Grade nicht übersteigt. Ich lasse noch einige Vorschläge folgen, für die dieselbe Beschränkung [363] gilt und deren man sich bei Bestimmung einer Cometenbahn bedienen kann.

§ 27. Nach dem, was ich oben (§ 19) sagte, sieht man (Fig. 29), dass der Bogen  $aedc$  des grössten Kreises derjenige ist, den der Comet scheinbar durchlaufen würde, wenn sowohl seine Bewegung wie die der Erde geradlinig und gleichförmig

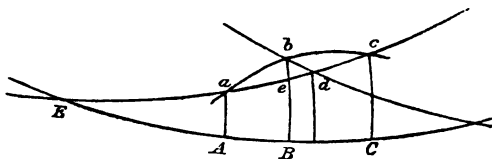


Fig. 29.

wäre, und dass für die Momente der drei Beobachtungen die scheinbaren Oerter des Cometen  $a, d, c$  sein würden. Es handelt sich also nur darum, die Länge der Bogen  $ad$  und  $dc$  mittelst der Bogen  $EA, EC$  und des Winkels  $AEa$ , die nach § 19 bestimmt werden, zu ermitteln. Sind aber die Bogen  $ad$  und  $dc$  gefunden, so kann man sie mit den Intervallen der Zeit zwischen den drei Beobachtungen vergleichen, um das Verhältniss der geocentrischen Distanzen des Cometen für die erste und dritte Beobachtung zu bekommen, und zwar folgendermassen.

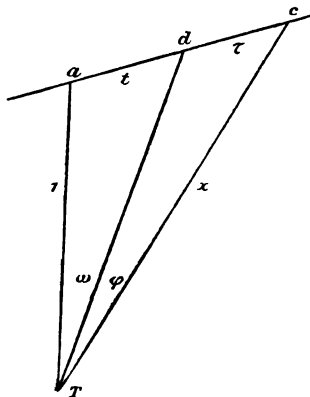


Fig. 31.

§ 28. Man mache (Fig. 31) die Winkel  $aTd$  und  $dTc$  gleich den Bogen  $ad$  und  $dc$  von Fig. 29. Nimmt man dann auf der Geraden  $Ta$  einen beliebigen Punkt  $a$  an,

so handelt es sich darum, eine Gerade  $ac$  zu ziehen, dass sie die Geraden  $Td$  und  $Tc$  so schneidet, dass die Strecken  $ad$  und  $dc$  proportional den Zeitintervallen zwischen den den Punkten  $a, d, c$  entsprechenden Beobachtungen werden. Seien diese Zeitenintervalle  $t$  und  $\tau$ , ferner Winkel  $aTd = \omega$ ,  $dTc = \varphi$ . Macht man  $Ta = 1$  und setzt  $Tc = x$ , so hat man:

$$\sin \omega : ad = \sin a d T : a T$$

$$\sin \varphi : dc = \sin a d T : c T$$

also

$$\sin a d T = \frac{a T \cdot \sin \omega}{ad} = \frac{c T \cdot \sin \varphi}{dc}$$

und folglich

$$c T = a T \frac{dc}{ad} \cdot \frac{\sin \omega}{\sin \varphi}$$

d. h.

$$x = \frac{\tau \sin \omega}{t \sin \varphi}.$$

[364] § 29. Hat man das Verhältniss zwischen  $aT$  und  $cT$  gefunden, so findet man leicht den Winkel  $Tac$  und dann  $dT$  oder das Verhältniss dieser Geraden zu  $aT$  und  $cT$ . Dieses Verhältniss wird nur sehr wenig von dem Verhältnisse der geocentrischen Distanz des Cometen zur Zeit der zweiten Beobachtung zu den beiden anderen geocentrischen Distanzen abweichen. Man findet aber auch sehr nahe die mittlere geocentrische Distanz zur Zeit der zweiten Beobachtung mittelst der Formel des § 16. Man sieht also, dass man auf diese Weise die Versuche, die man zur Ermittlung der Bahn anzustellen hat, bedeutend abkürzen kann. Die ganze übrige Rechnung kann man auf eine einfache successive Annäherung zurückführen, indem man die Formel anwendet (Fig. 30)

$$T = \frac{(SM + SN + MN)^{\frac{3}{2}} - (SM + SN - MN)^{\frac{3}{2}}}{12m},$$

welche ich in dem oben (§ 26) citirten Werke gegeben habe und worin  $T$  die Zeit bedeutet, welche der Comet braucht, um den Bogen  $MN$  zu durchlaufen. Der Buchstabe  $m$  hat selbe Bedeutung wie in § 26. Diese Formel ist um  $\frac{1}{2}$  facher, als sie keiner anderen Daten bedarf, als der



scheinbare Bewegung des Cometen. Aber so liegt die Sache in Wirklichkeit nicht. Sehr selten liegen mehr als drei Punkte [353] der scheinbaren Bahn genau in einem grössten Kreise; also können weder die Erde noch der Comet sich in gerader Linie und mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegen.

§ 3. Wenn ein Comet sich genau in der Ebene der Ekliptik bewegen würde, so fände seine scheinbare Bewegung ebenfalls in der Ekliptik, also in einem grössten Kreise statt. Aber dieser Fall tritt nicht ein; wenigstens sind bis jetzt alle Cometen ober- oder unterhalb der Ekliptik gesehen worden oder sie haben dieselbe nur in einem Punkte geschnitten. Man weiss sogar, dass die meisten Cometenbahnen sehr starke Neigung haben. Wir können also auch von dem Falle absehen, wo der Comet sich in der Ebene der Erdbahn bewegt.

§ 4. Wenn wir nun auch die scheinbare Bewegung der Cometen in grössten Kreisen nicht zulassen können, so werden uns diese doch von Nutzen sein, indem sie uns als Vergleichsmittel dienen. Betrachten wir die scheinbare Bahn eines Cometen, nehmen darauf zwei Punkte und legen durch sie einen grössten Kreis. Ich behaupte, *wenn die zwischenliegenden Punkte der scheinbaren Bahn auf derselben Seite liegen, wie die zugehörigen Oerter der Sonne, dann ist der Comet weiter von der Sonne entfernt als die Erde und im entgegengesetzten Falle ist er näher.*

§ 5. Da ich hier vorläufig dieses Theorem nur anführe, um den Nutzen der scheinbaren Bahn erkennen zu lassen, so habe ich die näheren Bestimmungen nicht ausgesprochen. Denn es ist nicht gleichgültig, wie die Punkte  $A, B, C$  genommen werden; im Gegentheil, es ist angemessen, eine Wahl zu treffen. Aber all' das wird sich besser durch die Analyse zeigen, die mich auf dieses Theorem geführt hat und die ich jetzt auseinandersetzen will, zuerst im Allgemeinen und dann im Besonderen.

§ 6. (Fig. 27.) Sei  $S$  das Centrum der Sonne,  $MN$  ein Theil der Cometenbahn,  $Q$  ein zwischenliegender Punkt, der ungefähr in der Mitte liegt. Zieht man die Sehne  $MN$  und die Radienvectoren  $SM, SQ, SN$ , so behaupte ich erstens, dass die Zeiten, die der Comet braucht, um die Bogen  $MQ$  und  $QN$  zu durchlaufen, sehr nahe im Verhältniss der Stücke  $Mq$  und  $qN$  der Sehne  $MN$  stehen. Denn die Zeiten verhalten sich wie die Flächen der Sektoren  $MSQ$  und  $SQN$  und daher

[354] nahe wie die Dreiecke  $SMQ$  und  $SQN$ . Da nun diese Dreiecke die Grundlinie  $SQ$  gemeinsam haben, und ihre Höhen sich wie  $Mq$  zu  $qN$  verhalten, so folgt, dass ihre Flächen sich wie die Strecken  $Mq$  und  $qN$  verhalten, und folglich verhalten sich die Zeiten, die der Comet braucht, um die Bogen  $MQ$  und  $QN$  zu durchlaufen, ebenfalls sehr nahe wie diese Strecken  $Mq$  und  $qN$ . Ich bemerke noch, dass man beweisen kann, dass es immer einen Punkt  $Q$  giebt, für den dieser Satz streng richtig ist. Aber im Allgemeinen genügt es, den Winkel  $MSN$  hinlänglich klein zu nehmen, um den Unterschied unmerklich werden zu lassen.

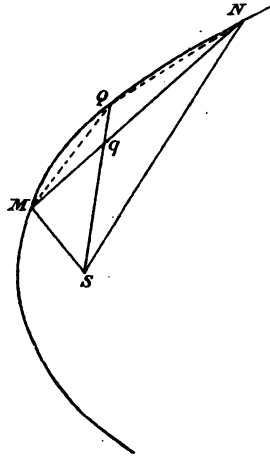


Fig. 27.

§ 7. Zweitens setzen wir voraus, dass für jede Cometenbahn die Zeit, um den Bogen  $MN$  zu durchlaufen dieselbe sei und dass sie so klein sei, dass der Winkel  $MSN$  15 bis 20 Grad nicht überschreitet. Wenn dann der Punkt  $Q$  ungefähr in der Mitte des Bogens  $MN$  liegt, so dass der Pfeil  $Qq$  wenig oder gar nicht sich von seinem Maximum unterscheidet, so behaupte ich, dass  $Qq$  sehr nahe umgekehrt proportional dem Quadrat von  $SQ$  sein wird. Denn da die Krümmung des Bogens  $MQ$  eine Wirkung der Gravitation ist, kann man den Pfeil  $Qq$  als Wirkung des Falles des Cometen gegen die Sonne betrachten. Es wird also  $Qq$ , wenigstens genähert, proportional dem Quadrat der Zeit und umgekehrt proportional dem Quadrat der Distanz  $SQ$  sein. Nun ist die Zeit als constant oder gleich für alle Fälle vorausgesetzt; also ist  $Qq$  einfach und sehr nahe umgekehrt proportional dem Quadrat von  $SQ$ . In Bezug hierauf bemerke ich noch, dass es Punkte  $Q$  giebt, wo das Theorem streng gilt. Aber da man diese Punkte nicht immer auswählen kann, halte ich an dem »nahezu« fest, das um so mehr der Wahrheit nahe kommen wird, je weniger spitz der Winkel  $MqS$  und je kleiner der Winkel  $MSN$  ist.

§ 8. (Fig. 28.) Sei jetzt  $S$  das Centrum der Sonne,  $AC$  die Bahn der Erde,  $MN$  die Bahn des Cometen, so zwar dass

scheinbare Bewegung des Cometen. Aber so liegt die Sache in Wirklichkeit nicht. Sehr selten liegen mehr als drei Punkte [353] der scheinbaren Bahn genau in einem grössten Kreise; also können weder die Erde noch der Comet sich in gerader Linie und mit gleichmässiger Geschwindigkeit bewegen.

§ 3. Wenn ein Comet sich genau in der Ebene der Ekliptik bewegen würde, so fände seine scheinbare Bewegung ebenfalls in der Ekliptik, also in einem grössten Kreise statt. Aber dieser Fall tritt nicht ein; wenigstens sind bis jetzt alle Cometen ober- oder unterhalb der Ekliptik gesehen worden oder sie haben dieselbe nur in einem Punkte geschnitten. Man weiss sogar, dass die meisten Cometenbahnen sehr starke Neigung haben. Wir können also auch von dem Falle absehen, wo der Comet sich in der Ebene der Erdbahn bewegt.

§ 4. Wenn wir nun auch die scheinbare Bewegung der Cometen in grössten Kreisen nicht zulassen können, so werden uns diese doch von Nutzen sein, indem sie uns als Vergleichsmittel dienen. Betrachten wir die scheinbare Bahn eines Cometen, nehmen darauf zwei Punkte und legen durch sie einen grössten Kreis. Ich behaupte, *wenn die zwischenliegenden Punkte der scheinbaren Bahn auf derselben Seite liegen, wie die zugehörigen Oerter der Sonne, dann ist der Comet weiter von der Sonne entfernt als die Erde und im entgegengesetzten Falle ist er näher.*

§ 5. Da ich hier vorläufig dieses Theorem nur anführe, um den Nutzen der scheinbaren Bahn erkennen zu lassen, so habe ich die näheren Bestimmungen nicht ausgesprochen. Denn es ist nicht gleichgültig, wie die Punkte  $A$ ,  $B$ ,  $C$  genommen werden; im Gegentheil, es ist angemessen, eine Wahl zu treffen. Aber all' das wird sich besser durch die Analyse zeigen, die mich auf dieses Theorem geführt hat und die ich jetzt auseinandersetzen will, zuerst im Allgemeinen und dann im Besonderen.

§ 6. (Fig. 27.) Sei  $S$  das Centrum der Sonne,  $MN$  ein Theil der Cometenbahn,  $Q$  ein zwischenliegender Punkt, der ungefähr in der Mitte liegt. Zieht man die Sehne  $MN$  und die Radienvectoren  $SM$ ,  $SQ$ ,  $SN$ , so behaupte ich erstens, dass die Zeiten, die der Comet braucht, um die Bogen  $MQ$  und  $QN$  zu durchlaufen, sehr nahe im Verhältniss der Stücke  $Mq$  und  $qN$  der Sehne  $MN$  stehen. Denn die Zeiten verhalten sich wie die Flächen der Sektoren  $MSQ$  und  $SQN$  und daher

[354] nahe wie die Dreiecke  $SMQ$  und  $SQN$ . Da nun diese Dreiecke die Grundlinie  $SQ$  gemeinsam haben, und ihre Höhen sich wie  $Mq$  zu  $qN$  verhalten, so folgt, dass ihre Flächen sich wie die Strecken  $Mq$  und  $qN$  verhalten, und folglich verhalten sich die Zeiten, die der Comet braucht, um die Bogen  $MQ$  und  $QN$  zu durchlaufen, ebenfalls sehr nahe wie diese Strecken  $Mq$  und  $qN$ . Ich bemerke noch, dass man beweisen kann, dass es immer einen Punkt  $Q$  gibt, für den dieser Satz streng richtig ist. Aber im Allgemeinen genügt es, den Winkel  $MSN$  hinlänglich klein zu nehmen, um den Unterschied unmerklich werden zu lassen.

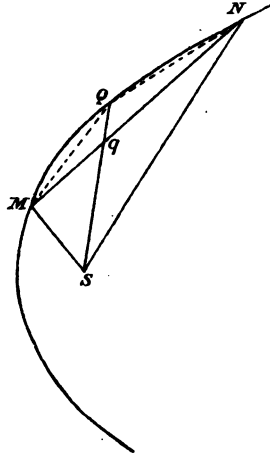


Fig. 27.

§ 7. Zweitens setzen wir voraus, dass für jede Cometenbahn die Zeit, um den Bogen  $MN$  zu durchlaufen dieselbe sei und dass sie so klein sei, dass der Winkel  $MSN$  15 bis 20 Grad nicht überschreitet. Wenn dann der Punkt  $Q$  ungefähr in der Mitte des Bogens  $MN$  liegt, so dass der Pfeil  $Qq$  wenig oder gar nicht sich von seinem Maximum unterscheidet, so behaupte ich, dass  $Qq$  sehr nahe umgekehrt proportional dem Quadrat von  $SQ$  sein wird. Denn da die Krümmung des Bogens  $MQ$  eine Wirkung der Gravitation ist, kann man den Pfeil  $Qq$  als Wirkung des Falles des Cometen gegen die Sonne betrachten. Es wird also  $Qq$ , wenigstens genähert, proportional dem Quadrat der Zeit und umgekehrt proportional dem Quadrat der Distanz  $SQ$  sein. Nun ist die Zeit als constant oder gleich für alle Fälle vorausgesetzt; also ist  $Qq$  einfach und sehr nahe umgekehrt proportional dem Quadrat von  $SQ$ . In Bezug hierauf bemerke ich noch, dass es Punkte  $Q$  gibt, wo das Theorem streng gilt. Aber da man diese Punkte nicht immer auswählen kann, halte ich an dem »nahezu« fest, das um so mehr der Wahrheit nahe kommen wird, je weniger spitz der Winkel  $MqS$  und je kleiner der Winkel  $MSN$  ist.

§ 8. (Fig. 28.) Sei jetzt  $S$  das Centrum der Sonne,  $AC$  die Bahn der Erde,  $MN$  die Bahn des Cometen, so zwar dass

dass, wenn alle anderen Umstände dieselben bleiben, der Winkel  $bRB$  gleich Null wird, wenn entweder der Winkel [361]  $BSQ$  gleich 0 oder gleich  $180^\circ$  wird. Nimmt man den Winkel  $BRb$  als sehr klein an, so findet man, dass er für dieselben Distanzen  $SB$  und  $SQ$  ein Maximum wird, wenn

$$\operatorname{tang} BSQ = \frac{SQ^2 - SB^2}{2SQ \cdot SB},$$

weil sich dann die Punkte  $B, b, Q$  auf der Peripherie eines Kreises befinden müssen, dessen Mittelpunkt auf der Geraden  $SQ$  liegt, oder was auf dasselbe hinauskommt, weil die Punkte  $B, b, R$  sich auf der Peripherie eines Kreises befinden, dessen Mittelpunkt auf der Geraden liegt, welche durch  $R$  geht und parallel zu  $SQ$  ist. Aber man sieht, dass diese Umstände nicht ausgewählt werden können, weil man die Cometen nehmen muss, wie sie sich zeigen.

§ 25. Wir machen noch einige Anmerkungen, wie man die Wahl des Punktes  $Q$  treffen muss. Diese Wahl wäre sehr leicht, wenn dieser Punkt das Perihel des Cometen wäre. Aber

dieser günstige Umstand kommt nicht vor und kann auch nicht im voraus erkannt werden. Sei also (Fig. 30)  $S$  das Centrum der Sonne,  $A$  das Perihel der Cometenbahn, die ich als parabolisch voraussetze.  $MN$  sei ein beliebiger Bogen. Theilen wir die Sehne  $MN$  in zwei gleiche Theile  $MG$  und  $GN$  und ziehen durch  $G$  die Parallele  $GQ$  zur Axe. Dann ist das Dreieck  $MGS$

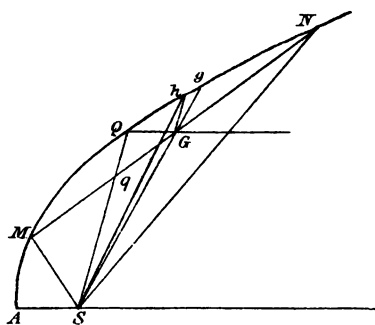


Fig. 30.

gleich dem Dreieck  $NGS$  und das Segment  $MQG$  gleich dem Segment  $NQG$ , also:

$$SMQGS = SGQNS.$$

Dann ziehe man den Radiusvector  $Sh$  so, dass das gemischtlinige Dreieck  $QGg$  gleich wird dem Sector  $hSg$  und man wird haben

$$SMhS = SNhS.$$

Ist nun der Bogen  $MN$  nicht sehr gross, so wird  $Qg$  als Gerade betrachtet werden dürfen und man bekommt:

$$Sg : Qg = Gg : gh$$

$$gh = \frac{Qg \cdot Gg}{Sg}.$$

[362] Daraus sieht man, dass  $gh$  eine sehr kleine Grösse ist und dass  $Gh$  sehr nahezu parallel zu  $SQ$  sein wird.

§ 26. Es sei  $T$  die Zeit, welche der Comet braucht, um den Bogen  $MN$  zu durchlaufen. Dann habe ich in der Abhandlung: *Insigniores orbitae cometarum proprietates*, erschienen 1761, gezeigt, dass

$$SQ = \frac{mT}{\sqrt{2GQ}} - \frac{1}{3} GQ = \frac{SM + SN}{2} - GQ.$$

In dieser Formel ist die mittlere Distanz der Erde von der Sonne gleich 1 gesetzt und

$$\frac{1}{m} = 116.2648$$

$$m = 0.008\ 601\ 059.$$

Es folgt also:

$$QG = qQ = \frac{m^2 T^2}{2(SQ + \frac{1}{3} QG)^2}$$

oder auch

$$qQ = \frac{m^2 T^2}{2(Sg - \frac{2}{3} QG)^2}.$$

Also ist

$$qQ < \frac{m^2 T^2}{2SQ^2}$$

und

$$qQ > \frac{m^2 T^2}{2Sg^2}.$$

Nun ist

$$qQ > gG;$$

wenn man also

$$gG = \frac{m^2 T^2}{2Sg^2}$$

(Mém. de l'Ac. Berlin 1783). Im zweiten Mémoire von 1778 (das erste enthält die geschichtliche Entwicklung des Problems) zeigt *Lagrange* zuerst, dass die Einführung der beiden Elemente, welche die Bahnlage bestimmen, als Unbekannte auf unüberwindliche Schwierigkeiten führt; er entwickelt dann aus der Bedingung, dass die drei Oerter in einer durch die Sonne gehenden Ebene liegen, die Ausdrücke der geocentrischen Distanzen durch die Dreiecksflächen, und ersetzt diese unter Benutzung des *Euler-Lambert*'schen Satzes durch die Zwischenzeiten und die Summen der Radienvectoren. Diese Werthe der geocentrischen Distanzen werden schliesslich in aus der Betrachtung der Dreiecke Sonne—Erde—Comet hervorgehenden Formeln eingetragen, wodurch drei Gleichungen mit den drei Radienvectoren als Unbekannten entstehen. Für die Auflösung dieser äusserst complicirten Gleichungen giebt *Lagrange* ein auf die Kleinheit der Zwischenzeiten basirtes, in praxi kaum durchführbares Verfahren an. — Im Mémoire von 1783 strebt er Vereinfachungen an, führt andere Unbekannte (Radiusvector, Parameter und grosse Axe) ein, stellt für den Radiusvector eine Gleichung siebenten Grades auf, zieht aber schliesslich drei Gleichungen mit drei Unbekannten vor, deren Auflösung wohl noch complicirter ist, als die des zweiten Mémoire. Für die astronomische Praxis konnten diese Methoden ebensowenig Bedeutung gewinnen, wie die im Berl. Jahrbuch für 1783 (*Oeuvres* VII) mitgetheilte, welche sechs Beobachtungen erfordert; trotzdem bedeuten *Lagrange*'s Arbeiten, durch die erstaunliche Eleganz ihrer Analyse und die Klarheit der Auffassung, für die analytische Behandlung des Problems einen grossen Fortschritt gegenüber *Euler* und sie haben gewiss grossen Antheil an der bald darauf erfolgenden Lösung durch *Du Séjour* und *Olbers*.

Die weitere Entwicklung kann hier nur mehr kurz angedeutet werden. In den Mém. de l'Ac. de Paris 1779—80 veröffentlichte *Laplace* eine ganz neue Methode, die mit den früheren kaum einen Zusammenhang hat: er ermittelt aus allen vorhandenen Beobachtungen Werthe der ersten und zweiten Differenzialquotienten der Coordinaten und zeigt, wie durch sie die Elemente dargestellt werden können. Diese Methode ist reproducirt in *Méc. cél.* T. I Livre II (1799), und ist in Frankreich vielfach gebraucht worden. Die Mém. de l'Ac. de Paris 1779 enthalten zwei Methoden von *Du Séjour*; die principiellen Mängel der ersten hat *Olbers* ausführlich aus-

einandergesetzt; die zweite aber, von der merkwürdiger Weise *Du Séjour* selbst wenig gehalten zu haben scheint und die *Olbers* in seiner Kritik ganz übergeht, hat sich später als identisch mit der *Olbers'schen* Lösung herausgestellt (siehe *Fabritius* Astr. Nachr. Band 106). Abgesehen davon, dass *Olbers*\*) seine Methode, durch die das Problem für lange Zeit zum Abschluss gebracht war, zweifellos selbständig gefunden hat, beruht sein Verdienst darin, dass er klar erkannte, die einfachste Lösung gefunden zu haben und dass er sie, namentlich auch durch eine vortreffliche Kritik der älteren Methoden, derartig ins Licht stellte, dass sie sofort allgemein adoptirt wurde. Wir schliessen diese kurze Uebersicht über den Gang, den das Problem nach *Lambert* genommen hat, mit der Angabe des Principes der definitiven Lösung. Die zweckmässigste Unbekannte ist die geocentrische Entfernung zur Zeit der ersten Beobachtung. Mittelst dieser lässt sich durch eine überraschend einfache Gleichung die geocentrische Distanz zur Zeit der dritten Beobachtung ausdrücken. In der Aufstellung dieser Gleichung, deren Einfachheit auf dem Umstand beruht, dass auch für die Sonne angenommen wird, dass der mittlere Radiusvector die Sehne im Verhältniss der Zeiten schneide, liegt der einzige Punkt, wo *Olbers* über *Lambert* hinausgeht. Durch die eingeführte Unbekannte können dann die äusseren Radienvectoren und die sie verbindende Sehne ausgedrückt werden. Schliesslich wird die Unbekannte durch allmähliche Annäherung so bestimmt, dass der *Lambert'schen* Gleichung genügt wird.

## II. Specielle Bemerkungen.

### Zur ersten Abhandlung.

Die erste diesem Bändchen einverleibte Arbeit *Lambert's* ist als selbständiges Werk — *Lambert* nennt es später einmal ein Tractätchen — erschienen und führt den vollständigen Titel:

---

\*) Dr. W. *Olbers* Abhandlung über die leichteste und bequemste Methode die Bahn eines Cometen zu berechnen. Weimar 1797.



J. H. Lambert

Academiae scientiarum Electoralis Boicae Membri et Professoris  
Honorarii, Societatis Physico-Medicae Basileensis Membri, Regiae  
Societati Scientiarum Goettingensi Commercio Literario adjuncti

Insigniores

Orbitae

Cometarum

Proprietates

Augustae Vindelicorum

Sumtibus Eberhardi Klett Viduae

MDCCLXI

*Lambert* verfasste es in der Periode seiner Wanderjahre im Jahre 1761, als er in seiner Eigenschaft als bayrischer Akademiker längere Zeit Aufenthalt in Augsburg genommen hatte und mit der bayrischen Akademie in München in Verhandlungen stand, nahe gleichzeitig mit seiner Architectonik und den kosmologischen Briefen.

Die hier gebotene Uebersetzung des längst sehr selten gewordenen Buches schliesst sich genau an das Original an; nur die in schwulstigem Latein geschriebene Vorrede habe ich nach Möglichkeit gemildert. Das Original enthält eine sehr grosse Anzahl von Druckfehlern namentlich in den Formeln; diese habe ich ohne Bemerkung beseitigt; es enthält aber auch einige Versehen und Flüchtigkeiten; diese habe ich, wo es möglich war, verbessert, darüber aber in den folgenden Noten berichtet.

Zu § 29. Dieser elegante Ausdruck für den parabolischen Sector rührt von *Lambert* her. *Lagrange* gab dafür einen analytischen Nachweis (Oeuvres IV 475—478), einen ähnlichen *Encke* (Berl. Jahrb. 1833 p. 265).

Zu § 39. Man weist diese Sätze leicht durch Einführung der rechtwinkligen Coordinaten der Punkte *N*, *Q* und *M* nach.

Zu § 40. In diesem für die älteren Methoden der Bahnbestimmung wichtigen Satze weist *Lambert* denjenigen mittleren Radiusvector nach, der *streng* gleich dem arithmetischen Mittel der beiden äusseren gesetzt werden darf.

Zu § 41. Der Nachweis für die Ellipse und Hyperbel gelingt leicht durch Einführung der rechtwinkligen Coordinaten in Bezug auf ein durch die Axen gelegtes Coordinatensystem.

Zu § 51—53. Diese Aufgabe wird schon von *Newton* behandelt und bildet die Grundlage seiner ersten Bahnbestimmungsmethode.

In der *Lambert'schen* Figur 8 und ebenso im Text kommt der Buchstabe *e* in zweifacher Bedeutung vor. Um die dadurch entstehende Verwirrung zu heben, habe ich den einen Punkt mit *a* bezeichnet und den Text (§ 52) entsprechend geändert.

*Lambert* kam in der oben unter 3) citirten Abhandlung auf die Aufgabe nochmals zurück. Er schreibt (*Berl. Jahrb.* 1779 p. 171): »... Auf diese Art entstand das Problem: durch vier Linien von gegebener Lage eine fünfte zu ziehen, welche von jenen in Theile getheilt sei, die ein gegebenes Verhältniss haben. Die Auflösung findet man in *Newton's* Arith. Univ. Probl. 56, bei *Gregori* L. V. Prop. XI, bei *Cassini* in den *Mém. de l'Acad. de Paris* 1727, wie auch in meinen *Orbitis Cometarum* § 51, wo ich aber jedoch (§ 54) angebe, was zu thun ist, wenn die vier Durchschnittspunkte nicht in gerader Linie liegen. Denn die gerade Linie kam mir schon damals als sehr misslich vor.

»Dermalen kann ich nun angeben, worin das missliche eigentlich besteht, und wie es überaus viel vermindert werden könne. Es sei Fig. 32, *S* die Sonne *P, M, N, Q* die vier Oerter des Cometen zur Zeit, da die Erde in *A, B, C, D* ist. Man ziehe die Chorden *PQ, AD* und die Linien *SP, SM, Sm, SN, Sn, SQ*, wie auch *SA, SB, Sb, SC, Sc, SD*, so müssen nicht die Linien *BM, CN*, sondern die Linien *bm, cn* gebraucht werden.

»Ungeachtet nun diese Linien *bm, cn* nicht durch unmittelbare Beobachtung bekannt sind, so lassen sie sich doch aus den Beobachtungen herleiten, weil die Punkte *SmMBb*, sowie auch die Punkte *SnNCc* in einer Ebene liegen.

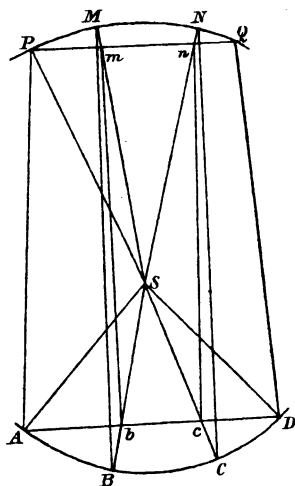


Fig. 32.

»Man zeichne sich auf der Kugelfläche die vier beobachteten Oerter des Cometen. Durch die beiden äussersten ziehe man einen grössten Kreis. Ferner durch den zweiten und dritten ziehe man zwei grösste Kreise nach den Punkten der Ekliptik, wo die Sonne zur Zeit der zweiten und dritten Beobachtung war. Diese zwei Kreise werden die Ebenen *BSM*, *CSN* vorstellen, und da wo sie den durch die beiden äussersten Oerter des Cometen gezogenen grössten Kreis durchschneiden, werden die Oerter sein, wo man den Cometen zur Zeit der zweiten und dritten Beobachtung würde gesehen haben, wenn derselbe in *m* und *n* und die Erde in *b* und *c* gestanden hätte. Dann aber würde die Bewegung sowohl des Cometen als der Erde geradlinig, und wo nicht vollkommen doch bis auf einen unerheblichen Unterschied gleichförmig gewesen sein.«

Dass auch oder vielmehr gerade mit dieser Modification die Aufgabe unbestimmt wird, also zu keiner Lösung des Cometenproblems führen kann, hat *Obers* bemerkt (Cometen ... § 23).

Zu § 56. Ich habe hier und im Folgenden »semilatus rectum« mit Halbparameter übersetzt, obwohl für diese Grösse jetzt, wenigstens in astronomischen Schriften, »Parameter« gebräuchlich geworden ist.

Zu § 63. Hier wie in dem ganzen Abschnitt, übergeht *Lambert* den in der Anwendung allerdings selten vorkommenden Fall, wo der von den Radienvectoren eingeschlossene Winkel *MFN* grösser als  $180^\circ$ , also  $c > 90^\circ$  wird. Es würde hier zu weit führen, alle Formeln auch diesem Falle anzupassen; es mag genügen anzudeuten, dass dann das Dreieck vom Segment subtrahirt werden muss und dass bei der Auflösung der vorkommenden quadratischen Gleichungen die andere Wurzel gewählt werden muss. Die zuletzt abgeleitete Hauptformel (§ 63) lautet allgemein geschrieben:

$$A = \frac{1}{3} \sqrt{AF} \left( \left( \frac{a+b+k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \mp \left( \frac{a+b-k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \quad \begin{array}{l} c < 90^\circ \\ c > 90^\circ. \end{array}$$

Zu § 65. Es wird hier der geeignetste Ort sein, die schönen Untersuchungen *Lambert's* über den *parabolischen Sector* einzufügen, die er in der oben unter 1) citirten Abhandlung angestellt hat. Er restimirt im VII. Capitel derselben zuerst die Resultate der Orb. Com. und fügt dann am Schluss folgende neue hinzu.

## Auszug

aus »Von Beobachtung und Berechnung der Cometen«. Beiträge zum Gebrauch der Mathematik, Theil 3, Seite 261—268.

[261] Es bleiben nun aber noch einige Sätze zurtück, die ich ebenfalls noch anführen werde.

§ 70. Der erste betrifft die Frage, *ein jedes parabolisches Segment in ein Dreieck von gleichem Inhalt zu verwandeln.* (Fig. 33.) Die Parabel sei  $AMN$ , das vorgegebene Segment  $MQNRM$ . Mit der Sehne  $MN$  ziehe man die Tangente  $TQ$  parallel, theile  $RQ$  in drei gleiche Theile und zweien von diesen Theilen mache man die Höhe des Rechteckes  $MmqnN$  gleich, so ist dieses Rechteck von gleicher Grösse mit dem

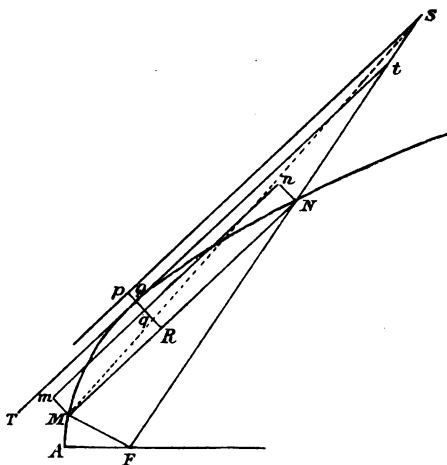


Fig. 33.

Segment  $MQNM$ . Der Beweis dieses Satzes findet sich im zweiten Theile meiner Beiträge zur Mathematik (Seite 272). Nun kann das Rechteck ohne Mühe auf unzählige Arten in gleich grosse Dreiecke verwandelt werden. Ich werde daher nur dasjenige Dreieck auswählen, das ich im Folgenden gebrauche. Dieses soll mit  $MN$  gleiche Basis haben. Demnach muss seine Höhe doppelt so gross als die von dem erstgezeichneten

Rechteck sein. Man mache also  $RP = \frac{1}{3} RQ$  und ziehe durch  $p$  die Linie  $pS$  mit  $MN$  parallel, so wird die Spitze des verlangten Dreieckes auf der Linie  $pS$  liegen müssen. So aber, wie ich das Dreieck gebrauchen werde, muss eben diese Spitze auch auf der aus dem Brennpunkt  $F$  durch  $N$  (oder auch [262] durch  $M$ ) gezogenen geraden Linie  $FNS$  liegen, demnach in  $S$ , als dem gemeinsamen Schnittpunkt der beiden Linien  $pS, FS$ . Das Dreieck ist demnach  $MSN$ .

§ 71. Verlängert man nun die Tangente bis  $t$ , so ist auch

$$Nt = \frac{1}{3} NS.$$

§ 72. Hieraus folgt nun hinwiederum, dass wenn man auf  $SF$  jeden beliebigen Punkt  $S$  ausserhalb  $N$  annimmt und  $Nt = \frac{1}{3} NS$  macht, man aus  $t$  eine Tangente  $tQT$ , und mit derselben die Sehne  $NM$  parallel ziehen könne, und sodann ein dem Segment  $MQNM$  gleiches Dreieck  $MSN$  haben werde. Hiervon lässt sich nun folgende Anwendung machen.

§ 73. (Fig. 34.) Aus dem Brennpunkt  $F$  der Parabel  $AMQN$  ziehe man eine beliebige Linie  $FQq$  und auf derselben nehme man ausser der Parabel einen Punkt  $q$  an. Aus

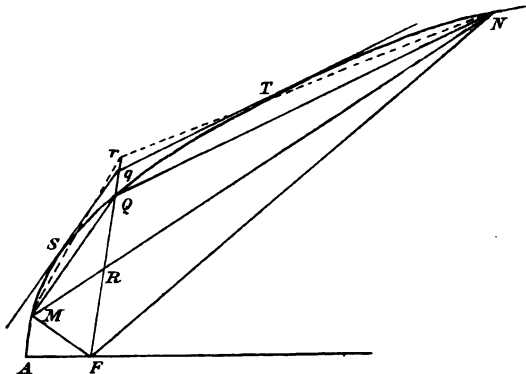


Fig. 34.

diesem ziehe man beiderseits die Tangenten  $qS$  und  $qT$  und mit denselben parallel die Sehnen  $QM$  und  $QN$ . Endlich ziehe man  $FM, FN, MN$ , so sage ich, dass sich der Inhalt des Sectors  $FMSQF$  zum Inhalt des Sectors  $FGTNF$  wie  $MR$  zu  $RN$  verhalte.

[263] § 74. Um dieses zu beweisen, so nehme man

$$Qr = \frac{1}{3} Qq$$

und ziehe  $Mr$ ,  $Nr$  durch gerade Linien zusammen. Da nun vermöge des vorhin (§ 72) erwiesenen die Segmente  $MSQM$ ,  $NTQN$  den Dreiecken  $MrQM$ ,  $NrQN$  gleich sind, so sind auch die ganzen Sektoren  $FMSQF$ ,  $FQTNF$  den ganzen Dreiecken  $FMrF$ ,  $FNrF$  gleich. Diese Dreiecke haben aber wegen der beiden gemeinsamen Punkte  $r$ ,  $F$  gleiche Höhen über und unter der Linie  $MRN$ , demnach verhalten sie sich, wie die Grundlinien  $MR$ ,  $RN$ . Demnach sind auch die Flächenräume der Sektoren im Verhältniss von  $MR$  zu  $RN$ .

§ 75. Da nun die Zeiten, in welchen die Bögen  $NQ$ ,  $QM$  durchlaufen werden, im Verhältniss der Sektoren sind, so sind sie ebenfalls im Verhältniss der Theile  $MR$ ,  $RN$  der Sehne  $MN$ . Man sieht leicht, dass es mit diesem Satze dahin abgesehen ist, die Bewegung des Cometen durch den Bogen  $MQN$  auf die Bewegung durch die geradlinige Sehne  $MN$  zu reduciren. Denn das Verhältniss der Zeiten trifft wenigstens bei den drei Punkten  $MRN$  genau mit dem Verhältniss der Theile  $MR$ ,  $RN$  zusammen.

[264] § 76. Für andere Punkte, die man sich auf der Sehne  $MN$  denken kann, ist hingegen dieses Verhältniss nicht ganz genau; es weicht aber desto weniger ab, je kleiner der Winkel  $MFN$  ist. Um dieses aufzuklären, sehe man  $R$  als einen jeden beliebigen Punkt der Sehne  $MN$  an. Zieht man die Linien  $FRQ$ ,  $MQ$ ,  $NQ$ , so wird immer der Flächenraum der Dreiecke  $FMQF$ ,  $FNQF$  im Verhältniss der Linien  $MR$ ,  $RN$  sein. Wenn demnach die ganzen Sektoren  $FMSQF$ ,  $FNTQF$  nicht genau in eben dem Verhältniss sind, so fehlt es eigentlich nur an den beiden Segmenten  $MSQM$ ,  $NTQN$  und zwar nur, sofern sie von dem Verhältniss  $MR:RN$  abweichen. Ist nun aber der Winkel  $MFN$  höchstens nur 20 Grad, so sind diese Segmente ein sehr kleiner Theil der ganzen Sektoren und dieses macht, dass das Verhältniss dieser Sektoren von dem Verhältniss der Linien  $MR$ ,  $RN$  nur unmerklich wenig abweichen kann. Da es nun auf  $MN$  einen Punkt  $R$  giebt, wo die Abweichung vollends gleich Null wird, so trägt auch dieser Umstand mit bei, die Abweichung für jede andere Punkte  $R$  noch um desto geringer zu machen. Wir können aber genauer sehen, wie gross die Abweichung jedesmal sein wird.

§ 77. Die Frage kommt darauf an, dass man überhaupt [265] das Verhältniss des Dreiecks  $FMNF$  zu dem Sector  $FMmNF$  bestimme (Fig. 35).

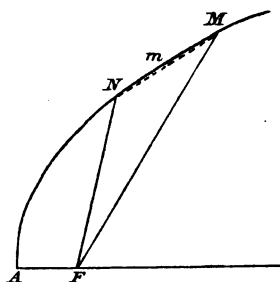


Fig. 35

Haben die Buchstaben  $a, b, c$  dieselbe Bedeutung wie in den Orbit. Comet. [§ 28], so haben wir (Orb. Com. § 29) den Inhalt des Dreiecks

$$FMNF = \triangle = ab \sin c \cos c,$$

des Sectors

$$FMmNF = A = \frac{1}{3} \sqrt{ab} \sin c \cdot (a + b + \sqrt{ab} \cos c).$$

Man setze nun die Winkel

$$AFN = 2\omega$$

$$AFM = 2\varphi$$

so ist

$$c = \varphi - \omega$$

und, wenn man  $AF = f$  setzt,

$$FN = f \sec \omega^2 = b$$

$$FM = f \sec \varphi^2 = a$$

demnach

$$\begin{aligned} \frac{\triangle}{f^2} &= \sec \omega^2 \sec \varphi^2 \sin(\varphi - \omega) \cos(\varphi - \omega) \\ &= (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \omega)(1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \omega) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{A}{f^2} &= \frac{1}{3} \sec \omega \sec \varphi \sin(\varphi - \omega) (\sec \omega^2 + \sec \varphi^2 + \sec \omega \sec \varphi \cos(\varphi - \omega)) \\ &= \frac{1}{3} (\operatorname{tg} \varphi - \operatorname{tg} \omega) (3 + \operatorname{tg} \varphi^2 + \operatorname{tg} \omega^2 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \omega). \end{aligned}$$

Hieraus folgt nun:

$$\frac{\triangle}{A} = \frac{3(1 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \omega)}{3 + \operatorname{tg} \varphi^2 + \operatorname{tg} \omega^2 + \operatorname{tg} \varphi \operatorname{tg} \omega}.$$

Man setze nun ferner

$$\operatorname{tg} \omega = z$$

$$\operatorname{tg} \varphi = z + \zeta,$$





haben. Sollen nun diese Verhältnisse gleich sein, so wird:

$$\frac{\operatorname{tg} c^3}{1 - \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} c} = \frac{\operatorname{tg} \gamma^3}{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \gamma}$$

demnach

$$\operatorname{tg} c = \frac{\operatorname{tg} \gamma}{1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \gamma} = \operatorname{tg} \gamma - \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \gamma^2 + \operatorname{tg} \omega^2 \operatorname{tg} \gamma^3 - \dots$$

Hieraus erhellt, dass die Winkel  $c$  und  $\gamma$  der Gleichheit desto [267] näher kommen, je kleiner sie sind, und je kleiner noch überdies der Winkel  $\omega$  ist.

§ 79. Da man aber diese Winkel nicht so wählen kann, wie sie dieser Bedingung zufolge sein sollten, so wird man dennoch nicht merklich fehlen, wenn sie überhaupt nicht von vielen Graden sind, weil das Verhältniss der Sektoren zu den Dreiecken nur in der zweiten Potenz der Winkel oder ihrer Tangenten  $\operatorname{tg} c$ ,  $\operatorname{tg} \gamma$  anfängt, von der Gleichheit abzuweichen. Ist z. B. der ganze Winkel  $MFN$  kleiner als  $20^\circ$  und die Winkel  $c$ ,  $\gamma$  sind nicht merklich verschieden, so ist jeder kleiner als  $5^\circ$  und das Quadrat ihrer Tangenten kleiner als 0.0077. Wenn man demnach um diesen ganzen Unterschied fehlte, so würde der Fehler auf 130 kaum 1 betragen. Es kann sich aber der Fehler niemals so hoch belaufen, es sei denn, dass man einen der Winkel  $c$ ,  $\gamma$  unendlich klein und

$$\frac{\sec \omega^2}{3(1 - \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} c)} > 1 \quad \text{oder} \quad \frac{\sec \omega^2}{3(1 + \operatorname{tg} \omega \operatorname{tg} \gamma)} > 1$$

annehmen wollte. Ersteres kann aber, zumal wo man mehrere Beobachtungen vorrätig hat, immer leicht vermieden werden, [268] wenn man die Zeiten zwischen den Beobachtungen nicht allzu ungleich nimmt.

§ 80. Wie aber auch immer die Sache ausfallen mag, so kann man die Voraussetzung, dass die Sektoren den Dreiecken gleich genommen werden, dergestalt gebrauchen, dass beide dadurch bis auf einen geringen Unterschied bestimmt werden, und diese Bestimmung kann sodann dienen, sie noch näher zu bestimmen, so oft man es nöthig findet.

Zu § 73. Bekanntlich ist die von *Euler* (Th. mot. Com. et Pl. § 3) eingeführte, hier von *Lambert* adoptirte aber mit einem neuen Werth der siderischen Umlaufszeit der Erde berechnete Grösse  $m$  später von *Gauss* (Theoria motus § 1)

durch die Grösse  $k$  (*Gauss'sche Constante*) ersetzt worden, die definiert ist durch

$$k = \frac{2\pi}{TV1 + \mu} \quad (\mu = \text{Masse der Erde}).$$

*Euler* und *Lambert* vernachlässigen die Erdmasse und definieren

$$m = \frac{1}{n} = \frac{\pi}{T}$$

als Constante des Sonnensystems. Der Zusammenhang zwischen  $m$ ,  $n$  und  $k$  ist also

$$k = 2m = \frac{2}{n}.$$

Mit den *Gauss'schen*, noch jetzt beibehaltenen Annahmen berechnet, wird

$$m = 0.008\,601\,049\,47$$

$$n = 116.2649.$$

Ich habe die Grössen  $m$  und  $n$  in der Uebersetzung beibehalten. Will man die Formeln in der jetzt gewohnten Schreibweise haben, so hat man  $m$  durch  $\frac{k}{2}$ ,  $n$  durch  $\frac{2}{k}$  zu ersetzen.

Zu § 83. *Aufgabe 15.* Hier entwickelt *Lambert* den wichtigen, für die Bestimmung parabolischer Bahnen grundlegenden Satz, der lange seinen Namen getragen hat, bis *Gauss* (Theor. mot. § 106) darauf aufmerksam machte, dass bereits *Euler* 1743 in der Abhandlung: *Miscell. Berol.* Tom. VII pag. 20 denselben gefunden hatte, ohne jedoch dessen Bedeutung zu erkennen und ohne dass er ihn selbst bei seinen Arbeiten über Bahnbestimmung jemals benutzt hätte. *Lambert* hat ihn zweifellos selbständig gefunden und jedenfalls zuerst seine Bedeutung erkannt und für die Bahnbestimmung nutzbar gemacht. Er selbst sagt darüber (Beiträge zum Gebrauch der Mathematik Theil III pag. 257): »Wer die Mühe kennt, die man auf Berechnung der Cometenbahnen bisher verwendet hat, wird gar leicht einsehen, dass es noch an einem Satze von solcher Geschmeidigkeit fehlte und dass ich mir allenfalls etwas darauf zu gute halten könne, ihn gefunden, und selbst auch auf die elliptischen und hyperbolischen Laufbahnen ausgedehnt zu haben.« Diese Verallgemeinerung wird denn auch jetzt als *Lambert'scher Satz* bezeichnet, während der specielle, für die Parabel gültige Fall als *Euler'scher Satz* citirt wird.

*Lagrange* (Nouveaux Mém. de l'Académie de Berlin Année 1778) kennt *Euler's* Priorität nicht, obwohl er, wie aus der prachtvollen historischen Einleitung hervorgeht, die Geschichte des Problems genau studirt hatte; er spricht sich über die Leistung *Lambert's* wie folgt aus: »C'est ce que *Lambert* a fait dans son beau Traité »De orbitis Cometarum«, où il est parvenu à un des Théorèmes les plus élégants et les plus utiles, qui aient été trouvés jusqu'ici sur ce sujet, et qui a en même temps l'avantage de s'appliquer aussi aux orbites elliptiques« (Oeuvres IV p. 444), und an einer andern Stelle: »... un Théorème qui, par sa simplicité et par sa généralité, doit être regardé comme une des plus ingénieuses découvertes qui aient été faites dans la Théorie du système du monde« (p. 447). Von dem Satze, den *Lambert* durch geometrische Betrachtungen findet, gab *Lagrange* zuerst einen analytischen Nachweis (Mém. de l'Ac. Berlin 1778, Oeuvres T. IV p. 475), dann *Encke* (Berl. Jahrb. 1833). *Encke* hat an der citirten Stelle auch eine elegante Umformung desselben angegeben, durch welche mit Benutzung einer von ihm berechneten Hilfstafel die Sehne rasch aus den Radienvectoren und der Zwischenzeit berechnet werden kann.

*Lambert* übergeht auch hier (siehe Anmerkung zu § 63) den Fall mit Stillschweigen, wo der zwischen den Radienvectoren eingeschlossene Winkel grösser als  $180^\circ$  wird. Der Satz lautet allgemein geschrieben:

$$T = \frac{1}{m\sqrt{2}} \left( \left( \frac{a+b+k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \mp \left( \frac{a+b-k}{2} \right)^{\frac{3}{2}} \right) \quad \begin{array}{l} c < 90^\circ \\ c > 90^\circ. \end{array}$$

Zu § 88. Die Zahlenangaben sind im Original durchweg uncorrect; ich habe dieselben verbessert.

Berechnet man die Reihe mit der *Gauss'schen* Constante, so kommt ( $FQ = R$ ) gesetzt)

$$\begin{aligned} NM = & [8.386\,0964_{-10}] \frac{T}{R^{\frac{1}{3}}} - [3.477\,0480_{-10}] \frac{T^3}{R^{\frac{7}{2}}} \\ & + [9.045\,1208_{-10}] \frac{T^5}{R^{\frac{13}{2}}} - \dots \end{aligned}$$

Zu § 92. Beide Formeln sind im Original uncorrect.

Zu § 117. Der letzte Theil des Satzes ist im Original unverständlich; es ist aber kein Zweifel, dass der Sinn hier richtig wiedergegeben ist.

Zu § 125. Auf dieser Reihenentwicklung beruht die *Encke'sche* Auflösung des *Lambert'schen* Satzes. Das *Encke'sche*  $\eta$  ist bei *Lambert* mit  $x$  bezeichnet und das von *Encke* tabulirte  $\mu$  ist:

$$\mu = \frac{k}{gz} = 1 + \frac{1}{24}x^2 + \frac{5}{384}x^4 + \frac{59}{9216}x^6 + \dots$$

*Encke* hat einen endlichen Ausdruck für diese Reihe gefunden; wird nämlich

$$\sin \Theta = \frac{3z}{\sqrt{8}}$$

gesetzt, so folgt

$$\mu = \frac{3 \sin \frac{1}{3} \Theta}{\sin \Theta} \sqrt{\cos \frac{2}{3} \Theta}.$$

Es wird dann

$$k = gz\mu = \frac{4mT}{\sqrt{g}} \mu.$$

Zu § 155. Dieser § enthält die erste *Lambert'sche* Bahnbestimmungsmethode. *Lambert* führt das Problem schliesslich auf eine Gleichung 6. Grades. *Lagrange* glaubt, dass dies nur davon herrührt, dass *Lambert* die halbe Summe der äusseren Radiusvectoren gleich dem mittleren setzt; denn er zeigte, dass der Grad dieser Gleichung im allgemeinen Fall mindestens der 7. sein muss (*Oeuvres* IV, 448). Allein *Cauchy* (*Oeuvres* Vol. X) hat später nachgewiesen, dass sich die *Lagrange'sche* Gleichung auf den 6. Grad reduciren lässt. (Siehe hierüber *Callandreau*, *Dét. des orbites* p. 26.)

Die Aehnlichkeit der *Lambert'schen* Methode mit der *Ollers'schen* ist schon mehrfach hervorgehoben worden. Ich weise dies an einer anderen Stelle ausführlich nach und zeige, wie die *Lambert'sche* Methode, wenn man sich nur die Mühe nimmt, seine Ausdrücke vollständig zu entwickeln und wenn man die von ihm zuletzt ganz überflüssiger Weise gemachte falsche Annahme, dass der mittlere Radiusvector gleich dem arithmetischen Mittel der äusseren sei, fallen lässt, zu einem schönen und brauchbaren Verfahren ausgebaut werden kann.

Eine Anwendung der ursprünglichen *Lambert'schen* Methode findet man in den »Beiträgen zum Gebrauch der Math.« Theil 3 Seite 270.

Zu § 157. Da sich der Originaltext an einigen Stellen speciell auf die von *Lambert* entworfene (hier durch eine übersichtlichere ersetzte) Figur bezieht, so musste er in der Uebersetzung theilweise geändert werden.

Zu § 158. Diese Bahnverbesserungsmethode hat *Lambert* in den »Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik« Theil 3 Seite 280 auf den Cometen von 1769 angewendet. Die Methode ist wegen ihrer Weitläufigkeit in der Praxis verlassen worden.

Zu § 159. Eine »Aufgabe 33« fehlt.

Zu § 171. *Lambert* hat in der oben unter 1) citirten Abhandlung Capitel X eine Ergänzung seiner Bahnbestimmungsmethode gegeben, die wegen der Aehnlichkeit mit den vier Grundgleichungen, von denen *Olbers* ausgegangen ist, bemerkenswerth ist und daher hier eingefügt werden soll.

#### Auszug

aus den »Beiträgen zum Gebrauche der Mathematik« Theil 3  
Seite 293—299.

[293]

Einige Betrachtungen über die parabolische Bahn.

§ 128. So einfach der Lauf eines Cometen in einer parabolischen Bahn ist, so hat man dennoch bisher keine Methode, denselben ohne vorläufiges Versuchen zu bestimmen, und wenn es hoch kommt, so fängt man mit einem *quam proxime* an, und holt sodann das übrige nach. Dieses ist auch der Weg, den ich genommen habe. Er ist indessen ungleich kürzer, als [294] derjenige, den *Lacaille* und *Lalande* vorschlagen. Bei diesem muss man unzählige Versuche vornehmen, um nur einer einzigen Bedingung Genüge zu leisten, und dann kommen erst noch unzählige Versuche vor, bis auch der anderen Bedingung Genüge geschieht. Zuletzt wird alles dennoch nur durch Einschaltungen und Näherungen erhalten.

§ 129. Ungeachtet ich es nun bei der hier gebrauchten Construction und Berechnungsart kann bewenden lassen, so werde ich doch noch zeigen, dass sich in der That die ganze Sache auf drei Gleichungen bringen lässt. Diese Gleichungen sind zwar ziemlich verwickelt, indessen werde ich sie dennoch angeben, theils weil man bisher noch gar keine gefunden, theils auch weil sich Näherungsarten daraus herleiten lassen, von denen man den Grad der Zuverlässigkeit bestimmen kann.

§ 130. (Fig. 36.) Es sei die Sonne in  $S$  und zur Zeit der drei Beobachtungen sei die Erde in  $A, a, \alpha$ , der Comet in  $C, c, \gamma$ . Die Linien  $CB, cb, \gamma\beta$  stellen die Höhe des Cometen über der Ebene der Erdbahn vor. Nun sind gegeben

I. Die Lage und Länge der Linien  $SA, Sa, S\alpha$  und daraus findet man

- 1) die Sehnen  $Aa, A\alpha, a\alpha$ ;
- 2) die Winkel  $SAA, S\alpha A; SA\alpha, S\alpha\alpha; Saa; S\alpha a$ .

[295] II. Die Lage der Linien  $AB, ab, \alpha\beta$  oder die beobachteten Längen des Cometen, und daraus ergeben sich

- 1) die Winkel  $BAS, baS, \beta\alpha S$  oder die Unterschiede der Längen der Sonne und des Cometen;
- 2) die Winkel  $BAA, BA\alpha; baA, ba\alpha; \beta\alpha A, \beta\alpha a$ .

III. Die Winkel  $CAB, cab, \gamma\alpha\beta$  oder die beobachteten Breiten des Cometen.

IV. Aus II und III können auch die Winkel  $CAS, caS, \gamma\alpha S$  oder die scheinbaren Abstände des Cometen von der Sonne berechnet und demnach als gegeben angenommen werden.

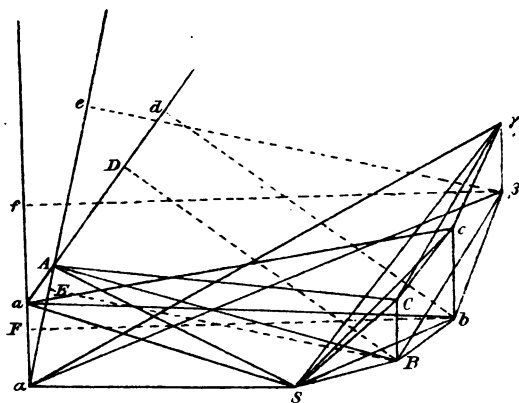


Fig. 36.

§ 131. Nun kommt die Rechnung auf die Distanzen  $SC, Sc, S\gamma$  und die Sehnen  $Cc, C\gamma, c\gamma$  an. Man nenne zu beiden Absichten

$$\begin{array}{ll} AC = x & SA = A \\ ac = y & Sa = a \\ \alpha\gamma = z & S\alpha = \alpha \end{array}$$

und die Winkel

$$CAS = C$$

$$caS = c$$

$$\gamma aS = \gamma$$

so findet man erstlich die Distanzen:

$$SC = \sqrt{x^2 + A^2 - 2Ax \cos C}$$

$$Sc = \sqrt{y^2 + a^2 - 2ay \cos c}$$

$$S\gamma = \sqrt{z^2 + \alpha^2 - 2\alpha z \cos \gamma}.$$

[296] § 132. Ferner setze man die Sehnen

$$Aa = K$$

$$A\alpha = k$$

$$a\alpha = x$$

und die Winkel (die wir sämmtlich als spitz ansehen)

$$aAB = B \quad Aab = b \quad A\alpha\beta = \beta$$

$$\alpha AB = B' \quad \alpha ab = b' \quad a\alpha\beta = \beta'$$

und die Breiten (die wir sämmtlich nördlich setzen)

$$CAB = L, \quad cab = l, \quad \gamma\alpha\beta = \lambda$$

so ist erstlich

$$CB = x \sin L \quad cb = y \sin l \quad \gamma\beta = z \sin \lambda$$

$$AB = x \cos L \quad ab = y \cos l \quad \alpha\beta = z \cos \lambda.$$

§ 133. Dieses ist, was sich für jede Beobachtung für sich finden lässt. Da nun aber die Sehnen  $Cc$ ,  $C\gamma$ ,  $c\gamma$  sollen gefunden werden, so müssen die Beobachtungen, je zwei und zwei, verglichen werden, und da haben wir erstlich die Unterschiede

$$CB - cb = x \sin L - y \sin l$$

$$CB - \gamma\beta = x \sin L - z \sin \lambda$$

$$cb - \gamma\beta = y \sin l - z \sin \lambda.$$

Von diesen werden wir die Quadrate gebrauchen.

§ 134. Sodann verstehe man, dass in  $D$ ,  $d$ ,  $E$ ,  $e$ ,  $F$ ,  $f$  rechte Winkel seien, so ist:

$$[297] \left. \begin{array}{l} BD = x \cos L \sin B \\ bd = y \cos l \sin b \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} BE = x \cos L \sin B' \\ \beta e = z \cos \lambda \sin \beta \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} bF = y \cos l \sin b' \\ \beta f = z \cos \lambda \sin \beta' \end{array} \right|$$

und demnach die Unterschiede

$$\begin{aligned} BD - bd &= x \cos L \sin B - y \cos l \sin b \\ BE - \beta e &= x \cos L \sin B' - x \cos \lambda \sin \beta \\ bF - \beta f &= y \cos l \sin b' - x \cos \lambda \sin \beta'. \end{aligned}$$

Auch von diesen Unterschieden werden wir die Quadrate gebrauchen.

§ 135. Endlich ist

$$\begin{array}{l|l|l} AD = x \cos L \cos B & AE = x \cos L \cos B' & aF = y \cos l \cos b' \\ ad = y \cos l \cos b & ae = x \cos \lambda \cos \beta & \alpha F = x \cos \lambda \cos \beta' \end{array}$$

und daraus folgt

$$\begin{aligned} Dd &= K - x \cos L \cos B - y \cos l \cos b \\ Ee &= k - x \cos L \cos B' - x \cos \lambda \cos \beta \\ Ff &= x - y \cos l \cos b' - x \cos \lambda \cos \beta'. \end{aligned}$$

Auch hiervon werden nun die Quadrate gebraucht werden.

§ 136. Es sind nämlich die Quadrate der Sehnen

$$\begin{aligned} Cc^2 &= (CB - cb)^2 + (BD - bd)^2 + Dd^2 \\ C\gamma^2 &= (CB - \gamma\beta)^2 + (BE - \beta e)^2 + Ee^2 \\ c\gamma^2 &= (cb - \gamma\beta)^2 + (bF - \beta f)^2 + Ff^2. \end{aligned}$$

§ 137. Werden demnach die gefundenen Werthe hierin gesetzt, so erhält man nach gehörigen Reductionen die Sehnen:  
[298]

$$\begin{aligned} Cc &= \sqrt{x^2 + y^2 - 2xy(\sin L \sin l + \cos L \cos l \cos(B + b))} \\ &\quad - 2Kx \cos L \cos B - 2Ky \cos l \cos b + K^2) \\ C\gamma &= \sqrt{x^2 + x^2 - 2xz(\sin L \sin \lambda + \cos L \cos \lambda \cos(B' + \beta))} \\ &\quad - 2kx \cos L \cos B' - 2kx \cos \lambda \cos \beta + k^2) \\ c\gamma &= \sqrt{y^2 + x^2 - 2yz(\sin l \sin \lambda + \cos l \cos \lambda \cos(b' + \beta'))} \\ &\quad - 2xy \cos l \cos b' - 2xz \cos \lambda \cos \beta' + z^2). \end{aligned}$$

In diesen Formeln sind die Coefficienten, womit  $xy$ ,  $xz$ ,  $yz$  multiplicirt sind, Cosinus der Seiten von sphärischen Dreiecken, in welchen der gegenüberstehende Winkel nebst den zwei anderen Seiten gegeben sind. Es könnte auch gezeigt werden, wie sich diese sphärischen Dreiecke in der Figur bilden. Man gewinnt aber weiter keine Abkürzung dabei, da diese Coefficienten, so wie sie hier sind, ebenso leicht in Zahlen berechnet werden.



§ 138. Es seien nun für die Bögen

$Cc$  die Zeiten  $T$

$C\gamma$  „ „ „  $t$

$c\gamma$  „ „ „  $\tau$

so ist

$$12mT = (SC + Sc + Cc)^{\frac{3}{2}} - (SC + Sc - Cc)^{\frac{3}{2}}$$

$$12mt = (SC + S\gamma + C\gamma)^{\frac{3}{2}} - (SC + S\gamma - C\gamma)^{\frac{3}{2}}$$

$$12m\tau = (Sc + S\gamma + c\gamma)^{\frac{3}{2}} - (Sc + S\gamma - c\gamma)^{\frac{3}{2}}.$$

Man darf demnach nur in diesen Formeln die § 131, 137 [299] gefundenen Werthe setzen, um für  $x$ ,  $y$ ,  $z$  drei Gleichungen zu erhalten, wodurch diese Distanzen bestimmt sind.

§ 139. Ungeachtet nun, um  $x$ ,  $y$ ,  $z$  zu bestimmen, drei Gleichungen genug sind, so lässt sich bei der Parabel noch überdies eine vierte finden, und diese beruht darauf, dass die Linien  $SC$ ,  $Sc$ ,  $S\gamma$  in einer und derselben Ebene liegen, demnach die Winkel

$$CSc + cS\gamma = CS\gamma$$

sein müssen. Dadurch wird von den sechs Linien  $SC$ ,  $Sc$ ,  $S\gamma$ ,  $Cc$ ,  $C\gamma$ ,  $c\gamma$  eine durch die übrigen an sich schon bestimmt. Es wird aber auch diese Gleichung, so wie die drei vorhin gefundenen so weitläufig, dass sie schwerlich jemals werden aufgelöst werden, ungeachtet man dadurch, dass man eine Gleichung mehr hat als nöthig ist, voraussehen kann, dass sich die ganze Rechnung endlich auf drei Gleichungen vom ersten Grade herunterbringen lässt.

Zu § 173—179. Die Fig. 21 zu diesen Sätzen ist in den Orb. Com. insofern eine ungeeignete, als in ihr der Schnittpunkt von  $Cc$  mit  $Qb$  und der Schnittpunkt von  $Cc$  mit der Ellipse  $AHB$  zufällig zusammenfallen; beide Punkte werden auch mit nur einem Buchstaben  $c$  bezeichnet, wodurch der Text theilweise undeutlich wird. Ich habe den ersteren Schnittpunkt  $c$ , den letzteren  $c'$  genannt und den Text entsprechend geändert. In der Lambert'schen Figur fällt auch der Endpunkt  $\gamma$  der kleinen Axe der zweiten Ellipse zufällig auf die erste Ellipse, was aber weiter zu keinen Zweideutigkeiten Anlass giebt.

Zu § 201. Ueber diesen bemerkenswerthen Ausdruck der Zwischenzeit durch ein bestimmtes Integral vergleiche man *Klinkerfues* Theor. Astronomie Vorl. 72 und *Callandreau*, Dét. des orbites § 2 (Mém. de l'Obs. de Paris).

Zu § 210. Hier entwickelt *Lambert* den berühmten, seinen Namen tragenden Satz. Den Fall, wo die Differenz der wahren Anomalien grösser als  $180^\circ$  wird, übergeht er auch hier mit Stillschweigen. Betreff anderer Beweise, Verallgemeinerungen und Nutzbarmachung des Satzes namentlich für parabelnahe Bahnen muss auf die Lehrbücher der theoretischen Astronomie verwiesen werden. Ich citire nur folgende besonders wichtige Abhandlungen, die sich mit dem *Lambert'schen* Satze beschäftigen:

- 1) *Gauss*, Theoria motus § 106 ff.
- 2) *Marth*, Auxiliary Tables for the solution of *Lambert's* equation. Astr. Nachr. Band 65, S. 321.
- 3) *Oppolzer*, Lehrbuch der Bahnbestimmung Bd. II, S. 464.
- 4) *Callandreau*, Dét. des orbites Ch. I, 1902.

#### Zur zweiten Abhandlung.

In dieser machte *Lambert* seinen schönen Satz über die scheinbare Bahn der Cometen bekannt. Die Bedeutung desselben beruht nicht darin, dass er durch den Anblick der scheinbaren Bahn einen Schluss auf die Entfernung des Cometen zulässt, sondern, wie *Lambert* selbst sehr wohl erkannt hat, in seiner Wichtigkeit für die Bahnbestimmung, deren innersten Kern er blosslegt. Schon *Lagrange* hat darauf hingewiesen, indem er von einer Gleichung 8. bez. 7. Grades für  $q''$  nachweist, dass dieselbe unmittelbar aus der Betrachtung *Lambert's* über die scheinbare Bahn fiesse:

»la solution précédente reviendra à celle, que *Lambert* a proposée dans les Mémoires de 1771. La méthode de *Lambert* est fondée uniquement sur la considération synthétique de l'orbite apparente de la Comète et n'en est que plus ingénieuse; mais elle ne fait pas voir que la solution qui en résulte a réellement le dernier degré de simplicité, qu'on puisse donner au Problème des Comètes envisagé directement, et il n'y avait qu'une analyse telle que la précédente qui pût lui procurer cet avantage.« (Oeuvres IV, Seite 473.)

Später war es wohl zuerst *Klinkerfues*, der in seiner »Theoretischen Astronomie« Vorl. 31—34 den *Lambert'schen* Satz in den Mittelpunkt rückte und (Vorl. 47) auf seinen Zusammenhang mit der *Gauss'schen* Grundgleichung hinwies. *H. Bruns* (Der *Lambert'sche* Satz, Astr. Nachr. Bd. 118 S. 241) hat die Gleichung achten Grades direct aus dem *Lambert'schen* Satze abgeleitet und zudem gezeigt, dass darauf eine brauchbare Methode der Bahnbestimmung aufgebaut werden kann. *J. Glauser* (Bahnbestimmung nach *Lambert*, Astr. Nachr. 121, S. 65) hat sich noch näher an die direct von *Lambert* gegebenen Andeutungen angeschlossen und eine Methode daraus zusammengestellt.

*Lambert* muss also auf Grund der vorliegenden Abhandlung als der eigentliche Begründer der directen Bahnbestimmungsmethoden betrachtet werden (*Callandreau*, Dét. des orbites p. 32).

Zu § 28. Diese Gleichung ist identisch mit der *Obers'schen* Hauptgleichung  $\varrho'' = \varrho M$  (*Vogel*, Ueber die Identität der *Lambert'schen* und *Obers'schen* Methode, Astr. Nachr. 136, S. 83).

---